BIBLIOTECA NAZIONALE VITT. EMANUELE
68
2 C
15

Ex Bibliotheca
majori Coll. Rom.
Societ. Jesu

14-24.E.31

54.7.10.

54
a

54.
a
10.

Cutberti de arte ~~computandi~~ supputandi

T. IV. 32. F.º

DE ARTE SVPputandi libri quatuor, Cutheberti Tonſtalli.



BIBLIOTECA NAZ. VIT. EMANUELE ROMA

PARISIIS.
EX OFFICINA ROBERTI STEPHANI.
M.D.XXXVIII.

BIBLIOTECA NAZ. ROMA VITTORIO EMANUELE

CVTHBERTVS TONSTALLVS THO-
MAE MORO S. P. D.

IAM ANTE ALIQVOT ANNOS, MI MORE, cum mihi cum argentarijs negotium interueniſſet,
1 nec ſatis inter nos de ratione conueniret: vt fraudem
mihi magnopere ſuſpectam vitarem, coactus ſum ra
tiones non admodum expeditas paulo propius inſpi
cere, atque artem ſupputandi quondam adoleſcenti mihi deguſta-
tam iterum repetere. qua ratione cum me à callidorum hominum
moleſtia explicuiſſem, cœpi mecum cogitare, futurum mihi in re-
liqua vita non modicum operæprecium, ſi numerandi artem ſic in
promptu tenerem, vt à quantumuis verſuto falli attentus non poſ-
ſem. Itaque vt penitius rem cognoſcerem, omnes omnium ſcriptos
de ea re libellos, eruditos, ineptos, Latinos, barbaros, quorum calle
rem linguas (nam nulla penè natio eſt quæ non eam artē vulgi lin
gua ſcriptam habeat) perlegi. & ne ſæpius toti libelli, quorum ma
gna pars interdum non placebat, non ſine faſtidio relegēdi eſſent:
ſiquid in his alicubi, quod gratum eſſet, occurreret, obiter annota-
ui. Quo factum eſt, vt ex multis multorum ſcriptis multa etiam i-
pſe colligerem: quæ dum repoſita apud me aliquandiu aſſeruaſſem,
ſubibat animum, conducibile fore ſi ſermone Latino, paulo magis
perſpicua reddere ea poſſem. ídque dum tentarem, & res parū pro-
cederet, fatigatione deuictus libellos ſæpe abieci, deſperans quod
deſtinaram, à me præſtari poſſe, tum quòd res ipſa per ſe obſcura eſ
ſet, tum quòd multa ſæpe occurrerent, quæ nec Latinū ſermonem
nedum eloquentiam admittere videbātur. Contrà incepto deſiſte-
re poſt auſpicatum opus oneri ſuccumbētem pudebat. Itaque ſub-
inde tentabam, ſiquid virium adderet repetitus labor. Interdum cū
ipſis certare difficultatibus iuuabat. & quæ moleſtiam non modi-
cam afferebant, contrà quàm fieri ſolet, obſtinatum ad laborem au-
gebant animum. Nonnunquam cogitabam, poſtquam id quod ma
xime optabam, conſequi non poſſem, vt cūcta cum gratia quadam
niterent: non inutile futurum, ſi quæ barbarie quadā inculta ſqua-
lebant, minus horrida redderem. Sic tandem certus propoſiti deuo
raui tædium, ac per multas difficultates eluctatus, è compluribus
excerpta hæc qualiacunque notaui, quæ apud me iam diu de indu
ſtria preſſi, cogitās ad vrſi exemplum fœtus ipſos informes aliquan
do per ocium lambendo figurare.

Nunc ad pontificatum Londinenſem vacantem homo omnium maxime eo honore indignus, benignitate tamen regis cum de omnibus bonis, tum de me ſuprà quàm dici poteſt meriti, deſignatus, & quod ſupereſt vitæ, ſacris addictus literis, prophana omnia ſcripta longe releganda putaui. atque in primis illos apud me reconditos de numerandi arte cõmentarios Vulcani quàm Mineruæ ſcriniis digniores abijciendos cenſui. Neque enim vel dignos eſſe qui in doctorum venirent manus, vel vllam in poſterũ vitæ meæ partem ſacris ſuffurari literis, vt limam eis inducerẽ, fas eſſe exiſtimaui. Rurſus in mentẽ venit, aliquid in his non inutile Arithmeticæ operam daturis poſſe deprehendi: nec ſatis conſultum fore, ſi quæ mihi tot noctium lucubrationibus cõſtiterunt, flammis abſumenda committerem. Nec tamen vt regi longe ſupra regum fortunam erudito, déque me ſupra omnes mortales merito, rude atque impolitum opus dedicarem, animum inducere potui: ne publica tantiſper negocia remorarer: dum ille ineptijs his legendis daret operã: néve gratiã quam referẽdi ſpes nequaquam datur, ingrato officio corrupiſſe viderer. Itaque circunſpiciẽti mihi, cuinam potiſſimũ ex amicorum cohorte collectanea hæc dicarem, tu pro noſtra conſuetudine atque animi tui candore viſus es ex omnibus maxime idoneus, qui, ſiquid in hoc opere placeret, gratum habere: ſiquid eſſet ieiunius, boni conſulere: ſiquid vſquam offenderet, ignoſcere paratus eſſes. Cui enim aptiora hæc quàm tibi eſſe poſſunt, qui totus in ſupputationibus excutiendis occupatus in regni ærario poſt præfectum primas tenes: quíque liberis tuis, quos liberalibus inſtitui diſciplinis curas, legenda ea relegare poteſ? illis enim vel maxime profuerint, ſi modo eſſent lectu digna, cum nulla re iuuenum magis vegetetur ingenium quàm numerorum arte diſcenda. Vale.

CVTHEBERTI TONSTALLI IN LIBRVM DE ARTE SVPPVTANDI PRAEFATIO.

A RTEM SVPPVTANDI STVDIOSIS EDIturus in primis illud præfandum operæpretium eſſe putaui, Pythagoram & veteres philoſophos pleroſque omnes vim quandam diuinam numeris tribuiſſe: id quod non abs re feciſſe exiſtimantur. Nam cum Mathematicæ diſciplinæ quatuor exiſtant: Arithmetica, quæ numerandi artem atque vniuerſam numerorum vim explicat, Muſica, quæ ſonorum concentus atque harmoniam diſcernit, Geometria, quæ terræ & aliarum rerum metiri magnitudinem inſtituit, Aſtrologia, quæ cæli atque aſtrorum motus certa naturæ lege inuariabiles docet: harum ad notitiam peruenire cupienti, primum Arithmeticam, quæ cæteris aditum pandit, deguſtare neceſſe eſt, ſine qua nunquam ad illas penetrare licebit. Hæc nanque ab illis nihil ſumit mutuum, ſuiſque contenta dotibus nihil alienum requirit: illæ contrà, ab hac præſidia ſæpe petunt. Itaque cum dei natura ſit eſſentia ſubſtantiáque ſimplex, quæ omnia intra ſe complexa nihil extra ſe quærit, ab omni concretione corporea terrenáque ſemota: illam etiam diſciplinam, quæ de incorporeis tractans nihil aliunde petit, par eſt arbitrari diuinam. Hac veteres ipſi totam philoſophandi rationem putauerunt eſſe concluſam. Nec tamen propterea quòd hæc omnium prima tentanda eſt, intellectu quoque facillima deprehēdetur, cum in illis multa effingi poſſint, quæ nos per ſenſus corporis veluti per manus in cognitionem ducant. quippe in Muſica, ſonorum in muſicis inſtrumentis concentus auribus applaudit, & ſe dat cognoſcendum. In Geometria lineas, circulos, quadratas triquetráſque figuras, & pyramides oculis ſubijcimus. Similiter in Aſtrologia cælum, ſphæras, axes, zodiacos, ſigna duodecim, aſtra etiam ipſa nobis fingimus: atque hæc quidem omnia vel lignea, vel ærea, vel ſi magis libet, depicta. quæ ſanè formæ, cum omnis noſtra cognitio à ſenſu oriatur, plurimum ad earum rerum cognitionem, quarum ſunt ſimulachra, rudes animos iuuabunt. At in Arithmetica ſicubi hærebis, quas, quæſo, numerorum ideas excogitabis, vt tete explices? Numeros nihil corporeum exprimit: nihil oculorum, nihil aurium ſenſus ad numerorum nodos ſoluendos iuuat: nulla numerorum ſimulachra, niſi numeri: tantum acri ingenio, firma memoria, & mente in ſe collecta com-

prehenduntur. Atque ideo moriones, qui ſæpe natura duce modulatos imitantur cantus, & omnigenas rerum formas in conſpectũ delatas agnoſcunt, multáque ex ſenſu communi tam apte in ſermone loquuntur, vt prudentes videri poſſint: ſiquid de numeris paulo tortuoſius quæras, continuo deprehenduntur rationis egentes, ſine qua nihil in numeris explicari poteſt. Quocirca cum vita noſtra tota in terrenis verſetur, ad quorum adſequẽdam notitiam ſenſus corporis non parum iuuant: cognitionem verò cæleſtium quæ ſola ratione ſectanda ſunt, maxime petamus: cum Mathematicæ diſciplinæ medium inter vtraque gradum teneant: ad cæleſtium cognitionem nulla re melius exercitamur, quàm animum à terrenis tantiſper abſtrahendo, dum matheſibus intenti ſumus: quas nimirum hominibus ipſa rerum natura videtur ediſiſſe, vt eſſet quo ſe ad cæleſtium meditationem exercerent. quod quum omnes diſciplinæ Mathematicæ præſtent, tum longe omniũ maxime Arithmetica: quæ nullis adiuta corporum imaginibus, mente ſola ſe colligente nititur. Hæc, præterquam quòd in numeris abſcondita quædam, & altioribus philoſophiæ venis abſtruſa rimatur: communem etiam ſupputandi rationem, ſine qua vita tranſigi nullo modo poteſt, mortales docet. Etenim ſiue ſeceſſui quis, ſiue foro ſeſe parat: ſi numerorum rationem non tenet, frequenter erit in vita non ſine damno deriſus. nam qui ſupputantem per dolum defraudabit, maiorem ex decepti inertia, quàm ex parto per fraudem lucro, voluptatem capiet: quem riſum nemo ingenuus ferre æquo animo poſſet. Itaque vel negocio vel ocio ſe dedentibus nihil magis neceſſarium erit quàm numerandi artem tenere promptam. Et vt ea quæ in Arithmetica ſunt altius recondita philoſophi magis callent, ita quod ad ſupputandi rationem attinet, quæ pars eius humillima eſt, à negocioſis longe ſuperantur. tam acres addit ſtimulos ſtudium pecuniæ. Quemadmodum autem cæteris Mathematicis diſciplinis Arithmetica ianuam aperit: ita in huius abdita penetrare ſine computandi ratione perſpecta, facile non datur. Cui rei perdiſcendæ cum aliquando impenſe operã daremus, & varijs ad id præceptoribus, alijs eruditis, alijs negocioſis vteremur: multorúmque libros, qui de ea tentarunt ſcribere, perlegeremus: viſum eſt operæpretium, quæ nos è multis collegimus, ſtudioſis legenda tradere. Id quo magis faceremus: aliorum obſcura ſcripta, aliorum imperfecta, quorundam verò etiam errata nos impulerunt: vt quæ diu multúmque nos torſerunt, vel per nos emen

datiora, vel magis facta perſpicua, ad poſterorum venirent manus. Quid verò præſtiterimus, aliorum ſit iudicium: certe conati ſumus, vt ne quis in poſterum, qui modo Latine ſciat, ad artem ſupputandi diſcendam præceptore egeret. Et quoniam in ſupputationibus ſæpe euenit vt eadem res expediri multiphariam poſſit: noſtri inſtituti non eſt, omnes omnino eorum qui ſcripſerunt, præceptiones enarrare: quod ſanè, præterquam quòd inutile eſſet, faſtidium afferret legentibus, ſed ex multis & varijs modis eos maxime mõſtrare qui viſi ſunt expeditiſſimi, quíque nullis inuoluti ambagibus exitum ſtatim dabunt. Quædam etiam leuicula compendia trademus, hactenus à nemine (quod ſciã) ſcripto prodita. Quãobrem, lectores candidi, lucubratiunculas noſtras vos boni conſulere eo æquius eſt, quòd in re per ſe obſcura plurimum deſudauimus, vt luce paululũ inducta, vobis inoffenſa lectio renideret. cui noſtro propoſito, quantuluncunque præſtitimus, gratia à bonis viris habenda eſt. Illud demum præmonendum eſſe duximus: quiſquis hunc librum in manus legendum ſumet, niſi mauult operam perdere, ei à capite eſſe ordiendum. neque enim vbiuis incipienti, tanquam in hiſtoria, ſeſe offeret ſenſus: quandoquidem ita contextum eſt opus, vt ſingula quæ præcedunt, ad ea quæ ſequuntur, inſtar elementorum habeant. Supputandi autem ratio partes has habet præcipuas, Numerationem, Additionem, Subductionẽ, Multiplicationem, Partitionem, Progreſſionem, Radicum inueſtigationem, de quibus ſingulatim ſuo ordine dicemus.

INITIVM NVMERATIONIS AB VNO proficiſcitur : procedere autem ea poteſt etiam in infinitum. Veruntamen numeri primarij, & ſimplicia habentes nomina, apud omnes gentes ſunt tantum decem:videlicet vnum,duo,tria,quatuor,quinque,ſex, ſeptem,octo,nouem, decem: quibus in ſingulis nationibus primi nominum impoſitores varie,pro ſuo quiſqu e arbitrio,nomina indiderunt. Quicquid vltra decem numeraueris: compoſitum ex horum in ſe replicatione reperies. nam vnum ad decem addimus, & numeramus vndecim : duo ad decem , & duodecim producimus: tria ad decem, & procreamus tredecim : atque ita reliquos numeros primarios cum decem cõponimus,nempe quatuordecim,quindecim,ſexdecim,ſeptemdecim, decem & octo, decem & nouẽ:donec iterum ad decem ventum fuerit:ibi quia bis dena collegimus, viginti ea vocamus,quod bis decem ſignificat,quaſi bis ginta;b literæ ſono in u tranſeunte propter vicinam quandã earum in pronunciatione cognationem . nam vt genta centum, ita ginta decem apud veteres in compoſitione ſignificat. Rurſus in numerando progredimur,& ſingulos numeros primarios, cum viginti con iungimus:quouſque ad terdena veniamus,quæ triginta,hoc eſt ter decẽ,vocamus:quibus denuo primarios numeros accumulare pergimus,donec ad quater dena perueniamus, quæ quadraginta vocamus. Atque hac numerandi ratione ſeruata,quinquaginta,ſexaginta,ſeptuaginta,octoginta,nonaginta procreamus:ſemper prioribus denis primarios numeros aggregantes,donec alia collegerimus , quibus ipſis nomina à numeris primarijs ſecundum denorum collectorum numerum denominata tribui manifeſtius eſt, quàm vt ſit admonendum. Decies dena centum primi nomenclatores Latine vocauerunt. Deinde alia dena rurſus procreantes,ipſa centena creſcente numero coaceruarũt:quouſque ad decies centena venirent:quibus nomen indiderunt Mille. Is ſummus numerus apud Latinos eſt , qui vno vocabulo exprimi poteſt . Reliqui autem omnes in infinitum numeri ex his in ſe replicatis & repetitis apud Latinos,atque itidem apud omnes omnium gentiũ linguas,ſua habent collecta nomina. Exempli gratia, decies millena, centies millena,millies millena,decies millies millena:atque id genus reliqua.præterquã quòd Græca lingua multo cæteris locuple-

tior,nō ſolum decies denis,& decies centenis,ſua vocabula Hecaton,& Chilia dedit,vt cæteræ nationes: ſed etiam decies millenis ſpeciatim indidit nomen,vt Myria dicerentur,& Myriades.

VIDES itaque in magno numerorum corpore id eſſe dena ipſa ex primarijs collecta numeris, quod in corpore noſtro ſunt artus,qui maiora exiſtunt membra.Et quemadmodum in arundinibus internodia paribus diſtincta ſpacijs proceritatem ipſam producunt calamorum: ſic in maioribus numeris alia alijs aggregata dena,velut numerorū internodia, creſcentem magnitudinem cōnectunt.Igitur omnem numerum neceſſe eſt, vel primarium eſſe: vel ex denis coaceruatis collectum:vel partim ex denis, partim ex primarijs compoſitum.

Numeros ſuis literis & notis Latini, ſuis Græci varie ſcribūt:quæ qui latius noſſe velit,apud Latinos Valerium Probum legat,apud Græcos Herodiani de numeris libellum. Noſtri inſtituti eſt eum ſolum numeros ſcribendi morem nunc attingere, qui à Chaldæis primum in finitimos,deinde in omnes penè gentes fluxit: vt ſuis numeri characteribus,non literarū elementis notarentur:qui mos ſignādi numeros,tā apud eruditos & Arithmeticæ peritos,quàm apud omnes omnium gētium mercatores & negotioſos ſic obtinuit,vt non alius magis per orbem terræ nunc ſeruetur.

DECEM itaque ſunt numerorum notæ,quas Arithmetici figuras vocant:ſigna etiam appellare eas licet;quæ omnes omnino in infinitum numeros,varie pro locorū ratione poſitæ,ſignificare poſſunt. Harū nouem ſuos denotant quæque numeros,videlicet prima 1,vnum ſignificat. ſecunda 2,duo. tertia 3,tria. quarta 4,quatuor. quinta 5,quinque. ſexta 6,ſex. ſeptima 7,ſeptē. octaua 8,octo. nona 9,nouem. Decima verò 0 nota ad formam literæ circulari figura eſt,quam alij circulum, vulgus ſiphram vocat:quæ nihil ipſa ſignificat,verum alijs præpoſita numeris, eorū omnium qui ſequuntur,auget in decuplum ſignificationē.Exempli gratia. 0 primæ notæ ſiue figuræ 1, à dextra parte iuncta, eam quæ vnum expreſſerat,decem ſignificare facit,10.atque itidem in reliquis.

ILLVD in primis animaduertendum : cum omnes Latini, & Græci, atque horum æmuli cæteri aliquid ſcripturi à læua recepto more incipiant, atque ita in dextram tendant : quiſquis his notis numeros ſcribere velit,à dextra paginæ parte incipere debet:& numeros cæteris minores à dextra parte ponere, atque ita in læuam tendendo progredi:vt quo maiores accedunt numeri, eo magis in

læuam ſemper eos promoueat. Id quod itidem in numeris obſeruant Latini, Græci, & alij, vt maximum quenque numerum à læua, minimum quenque à dextra collocent. Vnde cõſtare penitus inſpicienti poteſt, numerãdi artem à Chaldæis eſſe profectam: qui dum ſcribunt, à dextra incipiunt, & in læuam progrediũtur. dextram appello paginæ partem, quæ propoſita ante nos charta, dextræ noſtræ propior eſt: læuam, quæ ſiniſtræ.

HAE nouem notæ & figuræ omnes, quibus numeros ſuos denotari diximus, cum non ſemper eaſdem ſedes occupent, varie pro locorum poſitione ſignificant. Nam earũ vnaquæque primo loco, qui ad dextram eſt, tantũ ſuum numerum enunciat. Secundo loco læuam verſus poſita, decies tãtundem. Tertio loco læuam verſus, tantundem centies. Quarto loco læuam verſus, millies tãtundem. Quinto loco læuam verſus, tantundem decies millies. Sexto loco læuam verſus, centies millies tantũdem. Septimo loco læuam verſus, millies tantundem millies. Octauo loco læuam verſus, decies millies tantundem millies. Nono loco læuã verſus, centies millies tantundem millies. Decimo loco læuam verſus, millies ſupra millies tantundẽ millies. Vndecimo loco læuam verſus, decies millies ſupra millies tantũdem millies. Duodecimo loco læuã verſus, centies millies ſupra millies tantundẽ millies. Tertiodecimo loco læuam verſus, millies ſupra millies tantundẽ millies, atque id quidẽ millies. ad quem modũ vlterius etiam in infinitũ progredi licet. Poſtremum autem in numeris locum circulus nunquam obtinet, quando nihil eum ſequitur cuius ſignificationem augeat. Alioqui ſiqua figura à tergo ei erit, omnes numerorum ſedes occupare poteſt. Exemplum ſubdamus, in quo omnes numerorum notas ſuo ordine ponamus, cum aliquarum repetitione vſque ad tertiumdecimum locum, hoc modo,

· · · ·

3 2 1 0 9 8 7 6 5 4 3 2 1

Huius ſeriei numerum & eiuſmodi ſimiles, qui in immẽſum creſcunt, recenſurus, nequa tibi inter numerandum oriatur cõfuſio, quartum locum qui mille repræſentat, puncto ſuprà poſito notabis. Deinde quinto loco & ſexto intermiſſis, iterum ſupra ſeptimum locum punctũ adijcies. Rurſus octauo loco & nono intermiſſis, decimum locum puncto ſuprà adiecto ſignabis. Similiter vndecimo loco & duodecimo prætermiſſis, ſupra tertiumdecimũ locum pũctum appones. Atque ita, ſi maior fuerit numerus, duo-

bus locis à quarto ſemper intermiſſis, tertium quenque puncto ſuprà poſito notabis. Hæc punctorum adiectio non mediocrem numerandi facilitatem pariet. nam punctis ſignata loca, millenaria demonſtrant: ad quæ, velut ad quoſdam gradus, inter numerandum ſiſtere licet. neque enim longa numerorum ſeries vno ſpiritu pronunciari poteſt. Quartus itaque locus exhibet mille. Septimus millena millia, vulgus millionē barbare vocat: Latine reddideris, vt nunc fit ſupputatio, vel millena millia, vel millies millena. Priſci, decies centena millia dixerūt: ſicut paululū infra mōſtrabimus. Decimus locus capit millies millena millia, vulgus milliones millionū vocat: Latine dixeris, vt nunc mos eſt loquendi, vel millies millena millia, vel millies millena millies. Priſci, decies millies centena millia numerū illum vocauerunt. Tertiuſdecimus locus exprimit millies millena millia millies, vulgus millionem de millionibus millionū vocat: Latine, recepto nunc ſupputandi more, enunciabimus, vel millies millena millenorum millia, vel millies millena millia millies. Priſci eum numerum decies millies cētena millia millies appellarunt. Numeros inter hos medios ſiue centenarios, ſiue denarios promptum eſt cuiuis enunciare: cum ſtatim ante oculos nobis occurrat inter quæ genera millenariorū ſunt locati. Quod poſtquā animaduertimus, illud in primis obſeruare debemus, vt numeri illi cētenarij & denarij inter puncta adiecta medij, ſecundum nunc receptū ſupputandi morem, ea ſemper exprimant millenariorum genera quæ proxime à dextra parte punctis ſunt notata, quouſque ad prima millenaria venerimus.

IGITVR numerum hunc immenſum, punctis ſuprà poſitis in locis prædictis notatum, Latine ſic enunciabimus, à poſtremis & maximis incipientes numeris, & in minimis ac primis deſinentes, qui mos eſt apud omnes gentes, verbis numeros eloquendi.

3 2 1 0 9 8 7 6 5 4 3 2 1

Ter millies millena millia millies, ducenties decies millies millena millia, noningenties octogies ſepties millena millia, ſexcenta quinquaginta quatuor millia, trecenta viginti vnum. Aliud exemplum totidem notarum, conuerſo figurarum ordine, ponamus: quo magis, quod dicimus, legentibus innoteſcat.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 1 2 3

Hunc etiam numerum punctis, vt ſuprà dictum eſt, notatum, La-

tine ſic reddemus. Millies millena millia millies, ducenties tricies quater millies millena millia, quingenties ſexagies ſepties millena millia, octingenta nonaginta millia. centum viginti tria.

EX HIS, quos poſuimus, immēſis numeris per notas ſuas ſcriptis, punctiſque notatis, & Latine redditis, facile erit cuiuis numerum quemlibet minorem tum ſcribere, tum punctis ſignatum, Latine enunciare.

Si verò maior occurret numerus, eadē erit re ipſa facilitas: ſed verba, millies, & millia, toties in ſingulis maioribus numeris repetita, quoties ea addi pro loci augmento neceſſe eſt, auribus faſtidium non leue parient. Et vix vnquam in negocijs humanis maior occurrit numerus, quàm quem ſuprà poſuimus.

IN huiuſmodi autem immenſis numeris, ad ſingula loca punctis ſignata verbis enuncianda, toties vocabula hæc, vel millia, vel millena, vel millies, repetēda ſunt, quoties puncta, ab eo loco vnà etiam cōnumerato, in tota ſerie vſque ad primam notam reperientur: id quod in exemplis iam explicatis licet cernere.

VERVM, ne quis exempla faciliora in libro noſtro deſyderet, eiuſmodi quoque ſubiungemus. Atque ideo notis, vt libet, vſque ad ſeptimum locum poſitis (nam infra nihil eſt opus deſcendere) illud exemplum eſto.

•   •

6 8 5 4 9 7 3

Hoc exemplum, punctis prius ſignatum, ſic Latine reddes, Sexies millena millia, octingenta quinquaginta quatuor millia, noningenta ſeptuaginta tria. Aliud exemplum vſque ad decimum locum addo.

•   •   •

7 9 2 4 8 5 3 1 6 0

Numerum hunc, punctis ſuprà poſitis prius diſtinctum, Latine ſic reddemus, Septies millies millena millia, noningenties vicies quater millena millia, octingenta quinquaginta tria millia, centum ſexaginta.

Plura numerorum exempla nihil eſt opus adſcribere, quandoquidem ea quæ poſuimus, facile indicant, quomodo numeri quiuis alij, & ſcribi & Latine enuntiari debeant.

NON ME latet Romanos veteres, priſco more, ſuos nummos Seſtertios computantes, numerum tranſcendentem centum millia (qui numerus ſextam apud Arithmeticos ſedem occupat) La-

tine non enunciaſſe,niſi per aduerbia,decies,vndecies, & quæ ſuprà ſunt,vſque ad centies & millies, atque etiam vltrà in immenſum: per quæ numerum illum centum millium in ſe replicabant: in quo velut in limite quodam numerandi ſiſtebant,iterum incepturi. Interdum etiam vocabula hæc,centena millia,quodam ſermonis compendio omittebant:vt dicerent, Decies ſeſtertiûm pro decies centenis millibus ſeſtertiûm. qui numerus millena millia ſeſtertiorum nummorum exprimit,& ſeptimam apud Arithmeticos ſedem tenet. Centies ſeſtertiûm, pro centies centenis millibus ſeſtertiorum.qui numerus decies millena millia ſeſtertiorũ nummorum indicat, & ſedem apud Arithmeticos occupat octauam. Millies ſeſtertiûm,pro millies centenis millibus ſeſtertiorũ nummorum.qui numerus cẽties millena millia ſeſtertiorum nummorum ſignificat, & locum apud Arithmeticos nonũ poſſidet. & ſic vlterius vſque in immenſum veteres ad eam rationem Latine ſuos nummos computabant. id quod Budæus vir cum primis ætatis noſtræ eruditus, in libro ſuo de Aſſe,mira ſagacitate plenius annotauit. Cæterum Arithmetici vltra cẽtena millia tranſcendẽtes, magis ad millena millia gradum quendam ſiſtendi faciunt:quem tamen ipſum tranſiliunt,& per decies,& centies,auctis locis,rurſus ad millies millena millia denuo figunt gradum: atque vltra etiam ea,procedentes in immenſum, millena millia millenis accumulant,quemadmodum antè diximus: qui mos ſupputãdi per orbem terræ nunc eſt receptus. Itaque inter priſcos & recentiores nihil intereſt aliud,niſi quòd hi millenariorum loca obſeruãtes millena millia millenis aggregant. at priſci, centenorum loca, velut gradus quoſdam facientes, centena millia centenis vſque in immenſum accumulabant,ſemper ea in ſe replicantes. Cæterum locorum augmenta tam cum priſca ſupputatione, quàm cum nunc recepta conſentiunt. Quamobrem nihil video cur priſcam computationem, poſtquã apud omnes nationes eſt antiquata, mordicus tenere debeamus:quando mos nunc receptus maiore ratione nititur. Etenim cum Mille, maximus ſit apud Latinos numerus, qui vnico vocabulo poteſt exprimi:magis progredi cõgruit, donec ad millena millia ventũ erit,quàm ad centena millia,quæ infra ſunt, facere gradum. Verum ſiquem magis iuuat priſco more numerũ aliquem immenſum Latine reddere,breue ad id quoque compendium tradcmus: vt numerum notis ſcriptum punctis ſupra verticem ſignet,tertio,ſexto, nono,& duodecimo loco, cæteriſqꝫ qui

deinceps, duobus ſemper intermiſſis, ſequentur. illudque obſeruet: vt à poſtremis incipiens, ſingulas numerorũ notas vſque ad locũ ſextum, ea ſignificatione quã ſedes ſuppeditabũt, per aduerbia exprimat: quæ verò ſextũ locũ præcedũt, reddat per vocabula. Cũ autem ad punctis ſignata loca ventum erit: vocabula hæc, centena millia, ad ſingula puncta pronuntiet. veluti in primo exemplo per nos ſuprà poſito, ſiquis priſco more numeros enuntiare velit,

3 2 1 0 9 8 7 6 5 4 3 2 1

Tricies bis millies centena millia millies, centies nouies millies centena millia, octingenties ſeptuagies ſexies cẽtena millia, quinquaginta quatuor millia, trecenta viginti vnum.

ITIDEM in alijs numeris quantunuis immenſis cuiuis erit facile priſcos imitari, veluti in ſecundo ſuprà poſito, quem priſco more ſic exprimes,

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 1 2 3

Duodecies millies centena millia millies, trecenties quadragies quinquies millies cẽtena millia, ſexcẽties ſeptuagies octies cẽtena millia, nonaginta millia, cẽtũ viginti tria. Ad horũ exemplũ cæteros numeros õnes priſco more Latine reddere nullũ eſt negociũ.

GRAECI autẽ ſupputando quendã ſiſtendi gradũ faciũt ad Myriades, quæ decẽ millia ſignificãt, quintámque occupant ſedẽ: quo maiorem numerũ vno vocabulo nõ exprimunt. deinde myriades tam multas ſibi aggregant, vt ipſarũ etiam myriadum faciant myriadem: quæ ſumma millies centena millia, ſicut loquuntur priſci, vel centies millena millia, ſicut nũc Arithmetici, ſignificat, & nonum locũ tenet. vltra quem numerũ Græci vocabulis carẽtes, rurſus myriades in ſe replicant: donec totidem myriadũ myriades accumulauerint quot propoſiti numeri magnitudo ſuggerit. Hactenus de numeratione dixiſſe ſufficiat.

DE ADDITIONE.

ADDITIO numerorum eſt duorum pluriúmve numerorum in vnam ſummam collectio. Id autem fieri poteſt, ſiue minores quiuis numeri maioribus addantur, ſiue ecõuerſo, ſiue æquales æqualibus. Illud ſummopere obſeruãdum eſt: vt ſiue duo, ſiue plures ſint numerorum ordines, quos in vnam ſummam colligere velimus: ita eos omnino ſcribamus, vt ſub prima nota primi ordinis primæ reliquorũ ordinum figuræ directe,

velut ad perpendiculum locentur:ſub ſecunda ſecundæ,ſub tertia tertiæ,& ſic deinceps:vt in ſingulis ordinibus loci quoque numerorum,velut ſub vna linea perpendiculari ſibi reſpondeant.Nam alioqui ſi numerorũ ordines oblique ſcripti fuerint, & ipſi eorum loci alij alijs permixti ſe mutuo directe non reſpexerint,vt neſciatur quis cui locus reſpõdeat:magna ſequetur in cõputando confuſio. Idque non modo in numerorum additione, verum etiam in deductione,multiplicatione,& partitione eueniet. Quare ne in huiuſmodi labyrinthum incidamus,in vniuerſum præcipiendum eſt in tota numerandi arte, vt accurate ante omnia ponantur directi numerorum ordines,vt primi in ſingulis loci primis,ſecundi ſecundis,tertij tertijs,& ſic deinceps reſpondeant.

AD HAEC in numerorũ additione,deductione,multiplicatione,partitione,per vniuerſas numerorum ſedes, ſiue ſecundas, ſiue tertias,ſiue quartas,ſiue vlteriores,illud perpetuo ſeruare debem⁹, vt tantiſper dum numeros addimus, deducimus, multiplicamus, partimur, omnes omniũ locorũ notas pro primarijs numeris,nõ autem pro denarijs,centenarijs,millenarijs, aut vlterioribus accipiamus. Peracto verò opere,quãdo ſummam vel collectam,vel deductam,vel multiplicatã,vel partitam receſemus:ſingulis numerorum ſedibus ſuam vim reſtituimus, vt tum notæ in exprimẽda ſumma eam ſignificationem habeant quam loci ſuppeditabunt.

QVI numeros numeris additurus es: ſi duo tantum ſint ordines, poſtquam alterum numerum ſuprà, alterum infra ſcripſeris, ſub ambobus lineã calamo ducito. Deinde à dextra parte,vbi minimi numeri locati ſunt,incipiens, inferiorem primi loci numerũ ſuperiori eiuſdẽ loci adde,& numerũ ex his duobus cõpoſitũ,ſi vna nota ſcribi poſſit(quod certe erit,ſi minor quàm decẽ fuerit)ſub linea directe ſub primo loco pone.

4
3
7

Sin fuerit numerus denarius,aut eo maior,vt duab⁹ notis ad eius expreſſionẽ ſit opus:primã figurã, etiã ſi circulus ſit, ſub linea directe ſub primo loco ſigna. Et ſecũdæ figuræ numerũ memoriter tenẽs ad ſecũdũ locũ progredere. Vbi ſi circulos tã in ſuperiore,quã inferiore ordine reperis:numerũ memoria retẽtũ ſub linea ſecũdo loco ſubſcribe.

3	o	9
2	o	4
5	1	3

Sin neutra figura circulus fuerit:ante omnia repoſce à memoria numerum depoſitum : ne eius obrepat obliuio ſi reliquos numeros prius addas, quàm illum repetis : eúmque ad inferiorem eius loci notam memoriter adiungens, illam ipſam ſic auctam, ad ſu-

periorem ſecũdi loci figuram adde:& numerum ex eis ſurgentem,ſi vna nota ſcribi poſſit, ſub linea directe ſub ſecundo loco ſcribe.

5 9
3 4
9 3

Si verò altera tãtũ ſecũdi loci nota circulꝰ fuerit,altera figura ſignificãs, numerũ ipſũ memoria retẽtũ ex memoria promẽs adde ſignificãti figuræ:& ex eis ſurgẽtẽ numerũ ſi vna nota ſcribi poſſit,ſecũdo loco ſubſcribe.

3 8 9
2 0 4
9 3

Sin ad eũ numerũ exprimendũ, qui ſecũdo loco reperitur, duabus notis opus erit:primã earũ,etiã ſi circulus erit, ſub linea directe ſub ſecundo loco pone: & ſecũdæ notæ numerũ memoria ſeruans,ad tertiũ locũ progredere. Vbi itidẽ per omnia facies vti ſecũdo loco feciſti, & numerum ex additione repertum tertio loco repone.& ſic vlterius vſque ad poſtremum locum perge.

3 8 9
2 6 4
6 5 3

Quò cum ventum erit: numerũ ex additione repertum, ſi vna nota ſcribi poteſt,poſtremo loco depone.

7 3 8 9
1 2 6 4
8 6 5 3

Sin duabus figuris ad eum exprimendũ opus erit: numerus qui ſupereſt memoria retẽtus,à ſiniſtra poſtremi numeri,ſub linea ponatur.

7 3 8 9
6 2 6 4
1 3 6 5 3

Illa generaliter in omni numerorũ addendi loco obſeruare debemus: vt quotieſcũque in ordinibus addendis omnes notæ eiuſdem loci,circuli fuerint,ſi nullus numerus mente ſit retentus, qui lineæ ſubdatur,ſubſcribatur circulus.

2 0	4 0 2
1 0	3 0 1
3 0	7 0 3

Et ſimiliter quotieſcũq; in ordinibꝰ addẽdis circulus & nota ſignificãs eiuſdẽ loci fuerint:nullúſque numerus ſupereſt memoria retẽtus qui ſignificanti notæ addatur:illa ipſa nota ſignificãs,ſiue ſuperioris,ſiue inferioris ordinis fuerit,lineæ ſubſcribatur.

4 0 5 2
3 6 0 1
7 6 5 3

Præterea quotieſcũque ſupra lineã ductã plures ſunt ſuperiorũ ordinũ quàm inferiorũ loci,notæ illæ quæ ſuperſunt,eiſdem locis ſub linea ſubſcribi debẽt quibus ſupra lineam ſteterunt.

4 3 2 1
1 0
4 3 3 1

Exemplũ duorũ ordinum petamus quod ea omnia contineat, quæ ſuprà docuimus.Id autem erit eiuſmodi.

7 3 0 0 5 8 9 4
6 0 2 0 3 6 4 3
1 3 3 2 0 9 5 3 7

Quiſquis hos duos numeros in vnũ cõpoſiturus eſt, vel mẽte cogitet, vel verbis enunciet ea quæ ſequũtur. Primo loco in inferiori ordine reperio tria. addo ea ad quatuor quæ ſũt in ſuperiore ordine. fiunt ſeptẽ. ea ſub linea ducta ſubſcribo primo loco. Deinde tranſeo ad ſecundũ. reperio infrà quatuor, ſuprà nouẽ: addo, fiunt tredecim. quæ quia duabus notis ſcribi neceſſe eſt: primã figuram quæ tria demonſtrat, ſubſcribo ſecundo loco: alterã verò quæ vnũ repræſentat, memoriter tenẽs, progredior ad tertium locũ. Vbi primum exonerãs memoriã, vnũ quod mẽte teneo, adiũgo ad ſex, qui numerus inferioris ordinis primus occurrit: fiunt ſeptem. ea addo ad octo, quæ ſunt in ſuperiori ordine. ſic prodeunt quindecim. & quoniã ea duabus notis ſcribẽda ſunt, primã tertio loco ſubſcribo, quinque. alterã quæ vnũ indicat, ſeruans memoria, tranſeo ad quartum locũ. Vbi primũ promens ex memoria vnũ mente retentum, id adiũgo ad tria quę inferiori ordine ſunt ſcripta: fiunt quatuor. quæ addo ad quinque in ſuperiori ordine, & ſubſcribo quarto loco nouẽ. Pergo ad quintũ locũ, vbi ſuprà & infrà circuli occurrũt. nihil habeo quod addã: atque ideo ſubſcribo circulũ. Sexto loco infrà duo, ſuprà circulus occurrũt. nihil eſt cui addã duo. ſubſcribo duo. Accedo ad ſeptimũ locum. ibi infrà circulus, ſuprà tria ſunt: nihil eſt inferius quod adiungã ad tria. ſubſcribo tria. Feſtino ad octauũ & poſtremũ locũ. reperio infrà ſex: adiũgo ad ſeptẽ quę ſuprà ſunt. exeũt tredecim. is numerus, quia duabus notis ſignandus eſt: primã, nempe tria, octauo loco ſubſcribo: & aliã, quæ vnũ ſignificat, à ſiniſtra eiuſdẽ loci qui poſtremus eſt, pono. atque ita ſub linea facio nonũ locũ. Numerus itaque ſub linea, quẽ duos ſupra lineã numeros addẽtes cõpoſuimus, cõtinet in vniuerſum, Cẽties tricies ter millena millia, ducenta nouẽ millia, quingẽta triginta ſeptẽ. Quæ de duobus ordinibus cõponendis diximus, pene nobis inſtituẽdis ſuffecerint, ſi plures numerorũ ordines in vnã ſummã redigere velimus. Verũ vt paucis præcipiẽdis rẽ magis aperiamus, Multos ordines in vnũ collecturi, numeros primas ſedes occupãtes primo colligere ſic debemus, vt ab inferioribus ordinibus incipiẽtes ad ſuperiores aſcẽdamus, & numerũ ex additione repertum, ſi primarius erit, primo loco ſub linea ponamus. Sin ex denarijs numeris aliquis fuerit, circulus eo loco ſubſignetur: & nota quæ denariũ illũ, ſecundũ ſuã denominationẽ repræſentare debet, memoriæ cõmendata, ſecundarũ ſediũ figuris, ſi infra centũ numerus fuerit, annumeretur. Nã alioqui ſi numerus cẽtenarius, aut eo

maior vſque ad mille ſurget, vt in magnis additionibus nonnunquam euenit: cētena tertium locū, & quæ ſuperſunt dena, ſecundū occupent. Verūtamē vbi numerus vnius ſedis vſque ad centū aut ſupra aſcēdit, & nota quæ illū ſignificatura eſt, memoriter retenta in tertiū ab illa ſede locū trāſferri debet: ne nobis circa ſecūdi loci additionē occupatis, obrepat obliuio numeri retēti, ſtatim eū ſub linea paulum ſub tertio loco alicubi notemus: vt cū ad illū venerimus, admoneamur eum reliquis ſui loci numeris adiūgere. Si verò numerus ex primario & denario cōpoſitus erit: numer⁹ primarius ſub linea ſubſcribat, & denarius memoria retētus ſecundū ſuā denominationē figuris ſecūdi loci cōnumeretur, ſicut de duobus ordinibus eſt ſupra dictū. Expedito ſecūdo loco ad tertiū trāſeundū eſt: & itidē per omnia faciendū, queādmodū in ſecūdo. Deinde ad quartū locum ſimiliter pergendū, & deinceps ad reliquos omnes: in quibus obſeruētur quæ de ſecūdo loco diximus. Vbicūque autē eandem ſedē circuli aliqui & notæ ſignificantes occupant: circulis omiſſis, reliquæ figuræ ſimul additæ ſub linea ſuo loco ponantur. Quæ diximus, magis illuſtrabuntur ſequentibus exemplis.

6	9	0	0	1	3	0	3
6	9	0	0	0	0	0	0
6	9	0	0	8	0	0	0
7	9	0	1	7	1	0	0
7	9	0	0	0	0	0	3
7	9	0	0	6	0	0	0
8	9	0	0	4	0	0	0
8	9	0	2	6	2	0	0
8	9	0	0	8	0	0	0
9	9	0	0	0	0	0	0
9	9	0	0	2	4	0	0
9	9	0	1	7	0	0	2

1 0 0 8 0 9 7 0 0 8

Ex his tot numeris vnū collecturus, ſic cogitabis tacitus, vel ſi mauis, verbis enunciabis. primo loco præter circulos notæ reliquæ octo cōſtituunt. igitur ſub lineā ſcribātur octo. Secūdus locus circulos habet. ſub linea noto circulū. Tertij loci notæ præter circulos exprimunt decē. vno igitur memoriter ſeruato pro denario numero, atque eo adiūcto ad quarti loci figuras, fiūt quinqua-

ginta quinque. horũ quinque ſub linea quarto loco notantur: & quinque mẽte retẽta quinti loci notis,quæ circulis permixtæ ſunt, aggregata faciũt nouẽ.ea lineæ ſubduntur.Sexto loco,quia circuli ſunt,circulus lineæ ſubijcietur. Septimo loco notæ omnes cõpoſitæ producũt centũ & octo.ſubſcribũtur itaque octo,& cẽtenarij numeri nota,in nonũ locum,qui cõnumerato ſeptimo, tertius ab eo eſt,ſub linea reponẽda ſeruatur. Octauo & poſtremo ordinum qui ſupra lineã ſunt,loco ex numeris collectis ſurgũt nonaginta. nouẽ igitur memoriæ mandãtur. circulus octauo loco reponitur. Nono loco ſub linea ex memoria promo nouẽ ab octauo loco delata. ibi reperio vnũ pro centenarij numeri nota ex ſeptimo loco antè reconditum:quæ ſimul adiuncta fiunt decẽ.nono igitur loco circulum ſubnoto,& ab eius ſiniſtra vnũ depono:quod decimum locũ facit.Numer⁹ igit ex additione ſub linea collectus erit, Millies millena millia, octies millena millia nonaginta ~~quinq;~~ millia & octo. Aliud exemplũ multorũ ordinũ magis intricatũ ſubijcio.

		9	8	0	9	9	0	0	8
		7	9	0	9	8	0	0	9
		6	7	0	9	8	0	0	8
		9	8	0	9	9	0	0	9
		8	9	0	9	8	0	0	8
		7	7	0	9	8	0	0	9
		9	8	0	9	9	0	0	8
		7	9	0	9	8	0	0	9
		6	7	0	9	8	0	0	8
		9	8	0	9	9	0	0	9
		6	9	0	9	8	0	0	8
		8	7	0	9	8	0	0	9
1	0	0	7	1	8	0	1	0	2

OMNES in hoc exẽplo primi loci notæ ſimul iunctæ centũ & duo cõſtituunt.duo ſub linea primo loco ſcribantur,& cẽtenarius numerus per vnitatis notã ſcribendus tranſſeratur in tertiũ locũ. In ſecundo loco,quia nihil habes niſi circulos, ſubnotetur circulus. Tertio loco,quia omnes figuræ circuli ſunt: & nihil eſt quod addas ad vnũ ex primo loco pro cẽtenario numero trãſlatũ, ſubſcribatur vnũ.Quartus locus iunctis ſimul notis centũ continet: quamobrem ſubſcribere oportet circulum:& in tertium ab eo lo-

cum qui quarto etiã connumerato ſextus eſt, ſeruare reponendũ vnũ. Quintus locus centũ & octo cõtinet. ſubnotentur octo. iterum vnũ in tertium locũ, qui ſeptimus eſt à quinto cõnumerato, ſeruetur. Sextus locus, quia notæ omnes ſunt circuli, vnum habet ſubſcriptũ, ex quarto loco pro cẽnario numero ſeruatũ. Septimus locus quia multas habet notas, repeto primo à memoria vnum, ex quinto loco pro cẽtenario numero ſeruatũ. adiungo reliquis eius loci figuris: fiunt nonaginta ſeptẽ. ideò ſub linea ſubſcribo ſeptẽ, ſeruans nouẽ memoriter. Demũ ad octauum & poſtremũ ſupra lineam locũ properans, nouẽ antè recõdita iungo numeris eius loci: ſurgunt centũ. quamobrem circulum vnũ octauo loco, alium à ſiniſtra loco nono ſub linea repono, & centenarij numeri notam in decimũ locum, qui connumerato octauo, ab eo tertius eſt, trãſfero. Cõtinet autẽ hic numerus coaceruatus, Millies millena millia, ſepties millena millia, centũ octoginta millia, centum & duo.

QVI numeros numeris addere prompte velit: ante omnia memoriter ediſcere debet quos numeros procreent ſinguli ſub decẽ numeri primarij, vel ipſi geminati, vel reliquis primarijs adiuncti. quod certe tam ſcitu facile eſt, vt pueri adhuc impuberes id ferme nõ ignorent. Verũ ſiquis adeò ruſtice eſt educatus vt id neſciat: poterit vna hora, modo operam dare velit, id ediſcere. Verbi gratia, Nouem & nouẽ faciunt decẽ & octo. nouem & octo, decẽ & ſeptem. nouem & ſeptem creant ſexdecim. nouẽ & ſex, quindecim. nouem & quinque, quatuordecim. nouẽ & quatuor, tredecim. nouem & tria, duodecim. nouẽ & duo, vndecim. Deinde octo & octo producunt ſexdecim. octo & ſeptẽ, quindecim. octo & ſex, quatuordecim. octo & quinque, tredecim. octo & quatuor, duodecim. octo & tria, vndecim. octo & duo, decem. Rurſus ſeptẽ & ſeptem creant quatuordecim. ſeptem & ſex, tredecim. ſeptem & quinque, duodecim. ſeptẽ & quatuor, vndecim. ſeptem & tria, decem. ſeptẽ & duo, nouem. Deinde ſex & ſex faciunt duodecim. ſex & quinque, vndecim. ſex & quatuor, decem. ſex & tria, nouem. ſex & duo, octo. Præterea quinque & quinque producunt decem. quinque & quatuor, nouem. quinque & tria, octo. quinque & duo, ſeptem. Ad hæc, quatuor & quatuor procreant octo. quatuor & tria, ſeptem. quatuor & duo, ſex. Denique tria & tria cõſtituũt ſex. tria & duo, quinque. duo & duo, quatuor. Nam vnum ad reliquos numeros adiungere, pueri omnes infantiam egreſſi ſciunt. Quæ diximus, figuris notata ſub oculis poſita ſequuntur.

	9	8	7	6	5	4	3	2	1	
9	9 $\frac{9}{18}$	9 $\frac{8}{17}$	9 $\frac{7}{16}$	9 $\frac{6}{15}$	9 $\frac{5}{14}$	9 $\frac{4}{13}$	9 $\frac{3}{12}$	9 $\frac{2}{11}$	9 $\frac{1}{10}$	9
	8	8 $\frac{8}{16}$	8 $\frac{7}{15}$	8 $\frac{6}{14}$	8 $\frac{5}{13}$	8 $\frac{4}{12}$	8 $\frac{3}{11}$	8 $\frac{2}{10}$	8 $\frac{1}{9}$	8
		7	7 $\frac{7}{14}$	7 $\frac{6}{13}$	7 $\frac{5}{12}$	7 $\frac{4}{11}$	7 $\frac{3}{10}$	7 $\frac{2}{9}$	7 $\frac{1}{8}$	7
			6	6 $\frac{6}{12}$	6 $\frac{5}{11}$	6 $\frac{4}{10}$	6 $\frac{3}{9}$	6 $\frac{2}{8}$	6 $\frac{1}{7}$	6
				5	5 $\frac{5}{10}$	5 $\frac{4}{9}$	5 $\frac{3}{8}$	5 $\frac{2}{7}$	5 $\frac{1}{6}$	5
					4	4 $\frac{4}{8}$	4 $\frac{3}{7}$	4 $\frac{2}{6}$	4 $\frac{1}{5}$	4
						3	3 $\frac{3}{6}$	3 $\frac{2}{5}$	3 $\frac{1}{4}$	3
							2	2 $\frac{2}{4}$	2 $\frac{1}{3}$	2
								1	1 $\frac{1}{2}$	1

SIQVIS apud ſe ſcrutari velit cur hæc ita ſe habent, vt dū per ſingulos locos notas addimus, eáſque pro primarijs computamus, numerus tamen ſub linea collectus, quando locis ſua ſignificatio redditur, recte in vniuerſum reſpondeat: In promptu ratio eſt. nã quemadmodum in primo numerandi loco, primarias notas, ſi recte copulatæ ſunt, numerus ſub linea collectus continet: ita neceſſe eſt vt per ſingulos locos figuras omnes, ſi recte cõiunctæ ſunt, numerus ſub linea coaceruatus exprimat. Et ſiquis numerus, dum addimus, memoria retentus, à loco vbi repertus eſt, in alium trãſfertur: id fit quia maior eſt quàm vt eo loco quo natus eſt, reponi debuerit: & quando in ſuum locũ recte tranſlatus eſt, velut illius loci fœtus numeratur. Ad hæc cũ per omnes quidẽ locos figurarũ forma eadẽ ſit, ſignificatio verò pro augmento loci longe diuerſa: denominationẽ tamen omnes à primo loco recipiũt, vt quot illic vnitates ſingulæ repræſentãt, totidẽ ſecũdo loco dena, tertio centena, quarto millena, & ſic deinceps, exprimant. Quãdo igitur ſingulis numerorũ ſedibus, numerũ ibi collectum ſub linea ſubijcimus, eadẽ per omnes ſedes ratio eſt quæ de primo loco: vt ſicut ibi omnes numeros numerus ſub linea locatus continet, ita in omnibus locis collectos numeros repræſentet. Et cum omnium locorũ notæ denominationem à primo loco mutuentur, ſignificationem autem diuerſam ſinguli loci ſuppeditent: numerus ſub linea collectus totidem ſecundo loco dena, tertio centena, quarto millena, & ſic deinceps nobis denominabit, quot vnitates locorum illorum notæ, ſi primo loco fuiſſent poſitæ, repræſentarent.

Examen. SI SCIRE cupis an recte numeros collegeris, numerorum additionem recte factam eſſe, per deductionem probabis. Itaque ſi poſtquam numerorum additorũ ordinem aliquem à ſumma coaceruata deduces, reliquorum ordinum non deductorum ſumma ex deductione ſurget: tunc in addendo nihil eſt erratũ. Nam cum partes complures ad cuiuſuis rei compoſitionem coeunt, ſiqua earum ſola ſublata erit, cæteras remanere neceſſe eſt. Id manifeſtius fiet, cũ de deductione præcepta dederimus: ad quam nunc properamus.

4	5	3
3	4	2
7	9	5
4	5	3

ET QVONIAM nulla natio eſt quæ varia numiſmatum genera non habeat, alia pluris pretij, alia vilioris: ideo ad tam variorum additionem faciendam, ſingulis & nummorũ & ſummarum generibus ſuæ claſſes in abaco deſignandæ ſunt, vt vnaquæque ſi-

ue ſumma ſiue pecunia,quo maior eſt alijs, magis ſiniſtram occupet:quo vilior,magis dextram. Veluti ſi in vnam ſummã colligendi ſint aurei,valentes ſinguli denarios vicenos quinos:denarij,valentes ſinguli 4 nummos ſeſtertios:ſeſtertij,valentes ſinguli duos aſſes & ſemiſſem:cuiuſmodi ſunt vetera numiſmata Romana: aurei ſiniſtram occupent: denarij in dextram vergentes,medium locum teneant: ſeſtertij verò dextram. Deinde genera hæc tam varia additurus, à prima claſſe dextra ſeſtertiorum incipe: numeróſque omnes colligens,atque obſeruans quot quaternarij reperiuntur:ſiquis numerus excurrit,qui quaternarium non perficit, illum ibi ſubſignato. Ipſos autem quaternarios memoria tenens transfer in proximã denariorum claſſem.continuóque memoriam exonerans, & denarios illic repertos eis adiungens, per omnes ipſius claſſis numeros diſcurre:atque animaduerte quot viceni quini ſũt obuij.numerũ autem excurrentem,qui 25 nõ implet,ibi deponito. At viceni quini memoria reconditi, in proximam aureorum claſſem transferantur,cum illis primùm cõputandi: & numerus omnium collectus illic ſubnotetur. Itidem ſi in quauis alia natione aurei,denarij,nummi viliores illius regionis ſupputandi ſunt,eodem modo curandum, vt ſingulis ſua claſſis detur. Viam tantum monſtramus,cætera facile dabit frequens exercitatio.

Exemplum ante oculos ſpectandum hic ſubnotauimus, quod quiuis facile ſine præeunte explicabit.

Aurei	Denarij	Seſtertij
9 0 4	1 5	6
2 4 3	1 6	8
1 7 5	1 9	9
1 3 2 4	5	3

DE SVBDVCTIONE.

SVBDVCTIO numerorum eſt minoris numeri à maiore, vel æqualis ab æquale ſubtractio. Hãc autem eandem, vel deductionem, vel ſubtractionem appellare Latine licet. Vſus eius eſt, à toto ſubducta parte, reliquam totius partem cognoſcere: & vt apertius dicamus, duobus propoſitis numeris,alterum ab altero demere,vt videatur quid ſit reliquum, & quantum alter alterum ſuperet. Verbi gratia.ſume duos numeros, alterum ſeptem, alterum tria. ſi à ſeptem tria deducas, reliqua ſunt quatuor. totidem itaque vnitatibus tria ſuperantur. In ſubductio-

ne neceſſe omnino eſt vt duo ſint numerorũ ordines : alter à quo fieri debet deductio:alter,qui ſummã deducendam contineat. Oportet autẽ ſemper vel minorẽ ſummã à maiore , vel æqualem ab æquale ſubducere. nam maiorem à minore ſubtrahere,cõtra rerũ naturam eſt. Qui de cõputandi ſcripſerunt arte,varia præcepta de ſubducẽdis numeris dederunt:quorũ alij nõnunquã numeri propoſiti notas inter ſubtrahendũ putauerũt eſſe delendas. Alij lõgis ambagibus obſcura quædã docuerũt,vt pene difficilius nõ eſſet numeros diuidere,ꝙ deducere. Quæ dum legeremus,& eorũ probaremus nihil,quod vel tortuoſos haberẽt anfractus,vel multis lituris figuras cõfunderent:diu multúmque inueſtigãtes ſiquid apertius inuenire poſſemus,tãdem Iohãnis Garthi philoſophi eruditiſſimi atꝙ in Arithmetica lõge peritiſſimi auxilio,lõge facillimã & certiſſimã viam in ſubducẽdis numeris inuenimus: qua certe numerus omnis quantũuis magnus,quãtumuis intricatus,manentibus notis vniuerſis,nullo negocio ſubduci poteſt. Et ne multa expectatione lectorẽ torqueamus,ea ſubducendi ratio eſt eiuſmodi.

Poſtquã maior numerus à quo fieri debet deductio,ſupra,& minor numerus qui deducẽdus eſt,infra ita ſcribetur vt loci numerorũ locis reſpõdeant, primi primis,ſecũdi ſecũdis,tertij tertijs,& ſic deinceps:lineáꝙ ſub ambobus numeris à læua in dextrã perducta erit,ſicut in numerorum additione ſuprà docuimus:tum à dextra parte,vbi minimi numeri locati ſunt incipiẽtes à primo loco,primũ numerũ inferioris ordinis à primo ſuperiore,ſi ille ipſe ſuperior maior fuerit,ſubducamꝰ:& quod ex deductione reperietur, ſub linea primo loco ponamus.

7
3
4

Si verò numerus inferior ſuperiore maior erit,vt ab eo deduci nõ poſſit:tunc ſuperiori numero decem memoriter adiungamus, cõputantes ſuperiorem illum minorem numerũ velut ex primario & denario numero cõpoſitum: & ab eo ſic aucto maiorem numerũ inferiorem deducamus. Exempli gratia. ſuperior numerus eſto tria , inferior nouem. nemo deducere nouem à tribus poteſt. ad tria igitur mente adiungamus decem:& nouẽ à tredecim auferamus:tum quatuor ſuperſunt. is eſt numerus quem requirimus,qui ſub linea locetur.

1 3
9
4

Quòd ſi ſuperior ordo circulũ habeat,vt inferior numerus,quãtuluſcũque fuerit,ab eo demi nõ poſſit,illum ipſum circulum pro decẽ memoriter numeremus, & ab eo inferiorẽ notã,quæ ſemper denario numero minor erit,auferamus. Exempli gratia. ſit circulus

ſuprà, infrà ſeptem. fieri non poteſt vt ſeptem à nihilo deducamus. circulum igitur pro decem animo cōputemus, & à decem ſubducamus ſeptem: reliqua erunt tria.

0
7
3

Quotieſcunque autē denario numero memoriter adiecto, ſuperiorem numerum augebimus, vt inferior qui maior eſt, ab eo demi poſſit: toties per omnes numerorum locos, vnum ad ſequentis loci inferiorē numerū è veſtigio memoriter addemus, illúmque ipſum adiecta vnitate ſic auctum, à ſuperiore eius loci numero, ſi maior ſit, ſubducemus: & quod reliquum erit, eo ipſo loco ſub linea reponemus vnde id ſubtraximus.

4	0
2	7
1	3

Sin minor erit illius loci numerus ſuperior, quàm vt ab eo demi poſſit numerus inferior vnitate illa auctus: rurſus denario numero adiecto augeatur numerus ille ſuperior, vt inferior ab eo abduci poſſit.

2	4	0
1	5	7
	8	3

Idque per omnes numerorum locos ſemper eſt obſeruandum.

Sic primo loco expedito, ad ſecundum tranſeundum: vbi per omnia faciendum eſt itidem vt in primo. Sic cum ad tertium, quartum, vlterioremve locum ventū erit, eadem perpetuo ſeruāda ſunt.

AT SI quibuſvis numerorū ſedibus in inferiore demēdo numero circulus, in ſuperiore autem à quo fit ſubductio, nota ſignificās reperiatur: ſi nihil à priore loco propter denarium numerum mutuo ſumptum memoria retētum erit quod deduci debeat: numerus ille ſuperior integer ſubſcribetur.

4	3	2
3	0	1
1	3	1

Quando verò in vtroque numerorum ordine circulus nobis occurret, ſi nihil ex memoria promi poteſt quod ſubſcribatur, ſubnotetur circulus.

4	0	2
3	0	1
1	0	1

Vbicūque autem in quouis numerorum loco numerus inferior ſuperiori æqualis erit: cum nihil ſit reliquum, ſubſcribatur circulus, præterquam poſtremo loco. ibi enim ſi numerus ſubducendus ei par ſit à quo fit ſubtractio, nihil omnino ſubnotari debet: quia tunc per cætera peracta eſt ſubductio: & circulus in numeris poſtremum locū occupare nunquam poteſt.

3	4	1		3	4	1
2	4	1		3	2	0
1	0	0			2	1

Quòd ſi ſuperior numerorū ordo numeris aliquot & notis inferiorē tranſcendat: poſtquā inferioris ordinis numeros omnes à ſuperiore ſubduximus: quicquid de ſuperiore ordine reliquū erit, eiſdem locis & notis ſub linea numeris relictis adiungatur quibus ſupra lineam ſuo ordine ſtetit.

6	8	4	7
	1	2	3
6	5	2	4

Nunc exẽpla petamus,quæ viam demõſtratam clarius illuſtrent.

5 7 2 9 5 4 9 0
4 8 7 6 5 2 9 7

8 5 3 0 1 9 3

QVISQVIS à quinquagies ſepties milenis millibus, ducentis nonaginta quinque millibus,quadringentis nonaginta, ſubducere cupit quadragies octies millena millia,ſeptingenta ſexagintaquinque millia,ducenta nonagintaſeptem : depoſitis notarum ordinibus,lineáque ducta,eiuſmodi quæ ſequuntur,tacitus ſecum conſyderet, à primis auſpicando numerorum ſedibus, Septem à circulo ſubducere non poſſum. computo igitur circulum pro decem: & à decẽ demo ſeptẽ:ſuperſunt tria.ea ſub linea locatur.Tranſeo ad ſecundam ſedem . numerus inferior ſubducendus occurrit, nouem. huic vnum addo,quia ad circulum in primo loco aſſumpſi decem, & pro decem computo. ea à nouem demere non poſſum. mutuor igitur alia decem: & addens ea ſuperioribus nouem , computo decem & nouem, à quibus deduco decem: reliqua ſunt nouem, quæ ſubſcribo.Pergo ad tertium locum:vbi quia in priore ſede ſum decem mutuatus , vnum adiungo ad numerum inferiorem , nempe duo,& fiunt tria.ea ſubduco à quatuor,quæ ſuprà ſunt: reliquum eſt vnum, id ſubſcribo. Progredior ad quartum locum. numerus vterque quinque continet.& quia alter alterum exhaurit:nihil erit reliquum.pono igitur ſub linea circulum.Quinto loco ſex à nouẽ ſubtraho. tria relinquũtur:quæ lineæ ſubijcio. Sexto loco,quia ſeptem à duobus demi non poſſunt:aſſumptis ad ea,decẽ,fiunt duodecim:à quibus aufero ſeptẽ,& quinque ſuperſunt,quæ lineæ ſubdo.Septimo loco,quia 10 in priore ſede ſum mutuatus,inferiorem numerum octo,vno augeo,& nouem computo:ea,quia à ſeptẽ auferre non poſſum,ad ſeptem aſſumptis decem, à ſeptemdecim aufero nouem. reliqua manent octo: ea ſub linea depono. Propero ad poſtremũ locum,quo memoria affert vnum,quia ex ſuperiore ſede ſumpta ſunt decem mutua. eo ad inferiorem numerum quaternarium iuncto, fiunt quinque. quibus à quinque ſuperioribus demptis, nihil ſupereſt reliquũ. nihil igitur omnino ſubſcribitur. tum quia ſubductio iam peracta eſt, tum quia poſtremus locus circulũ nunquam capit. Reliquum igitur ſuperioris numeri,à quo inferiorem ſubduximus,ſub linea reperietur,Octies millena millia,quin-

genta triginta millia, centum nonaginta tria. Iterum aliud exemplum plurium locorum magis impeditum ponamus.

1 0 0 0 0 8 1 0 0 7 1 0 0
4 8 4 0 5 7 4 8 0 0 8 7
5 1 6 0 2 3 5 2 7 0 1 3

Primo loco,quia ſupra ſeptem eſt circulus, aſſumantur decem:à quibus ſeptē deductis,tria ſuperſunt. Secundo loco occurrūt octo, quæ vnitate ex memoria augentur: & fiunt nouem. ſi ea à decē ad circulum aſſumptis ſubtrahantur,remanet vnum. Tertio loco vnū ſupra,infra circulus eſt. vnū ex memoria promitur: quod ſuperius exhaurit. & quia nihil ſupereſt:ſubſcribemus circulum. Quarto loco,quia inferius circulus eſt,ſuperius ſeptē:à quibus nihil eſt quod ſubducamus, ipſa ſeptem ſubſcribuntur. Quinto loco quia octo à circulo demi nequeunt: à decem quæ mutuamur, ea deducimus. duo reſtant. Sexto loco ad quatuor quæ infra ſunt,vnum addimus ex priore ſede memoria ſumminiſtrante:quæ ſimul addita ſubducimus à decem ad circulum ſuperiorem aſſumptis. remanent quinque. Septimo loco,ſeptem vno aucta,quia ab vno demi nequeunt, ab vndecim tolluntur:ſumptis decem,tria ſubnotamus. Octauo loco,quinque quæ ſunt infra,vno ex priore ſede delato augemus: & ſex ab octo ſubtrahimus. duo manent reliqua. Nono loco ſuprà & infrà circulus eſt, igitur ſub linea ponitur circulus. Decimo loco, ſublatis quatuor à decem, quia à circulo nequeūt eximi: ſex ſubſignanda ſunt. Vndecimo loco, octo quæ inferius ſunt, vno in memoria recōdito augemus. & nouem,quia à circulo non poſſumus, à decē deducimus. ſic vnum manet reliquū. Duodecimo loco promimus vnum ex memoria,& addimus ad quatuor. quæ,quia ſuprà circulus eſt,auferimus à decem:& quinque nobis ſuperſunt:ea ſub linea deponimus. & quoniam vnum adhuc ſupereſt mente reconditum,quod vnitatem illam ſuperioris ordinis poſtremā exhaurit, circulus ſubſcribi deberet, niſi poſtremus eſſet locus qui eum non capit. igitur nihil amplius apponitur:quia peractum eſt opus. Reliqui ſumma eſt,Quingēties ſedecies millies millena millia, vicies ter millena millia,quingenta viginti ſeptem millia,& tredecim. Si quis expedite ſine vlla mora numeros velit ſubducere: primū memoriter ediſcat quātum erit reliquū,ſi ſinguli numeri primarij minores à maioribus ſubducantur:id quod pueri plerique omnes tenent:& rurſus quid ſupererit,ſi numeri ſimplices, maiores à mino

ribus cũ denario numero infra viginti copulatis fuerint ſubducti.

Et queadmodum in additione præcepimus,in primis in memoria recondendũ eſſe quos numeros procrearẽt ſinguli numeri primarij ſibi inuicem copulati, ita hic ẽ conuerſo perneceſſariũ putamus vt expedite quis teneat quos relinquant numeros ſinguli numeri primarij,vel inuicẽ à ſe ſubducti, vel à procreatis per ſui additionem numeris extracti. Quod ſiquis ignorat,vnius horæ labor, modo intentus ſit animus,id ſuppeditabit. Verbi gratia,decẽ à decem & nouẽ deductis,ſuperſunt nouẽ. nouem à decẽ & octo demptis,reliqua ſunt nouem. nouem à ſeptẽdecim ſublatis,manent octo. ſi nouem tollas à ſexdecim,remanent ſeptẽ. ſi nouem demas à quindecim,reſtant ſex. ſi nouem auferas à quatuordecim,ſupererũt quinque. nouem exemptis à tredecim,quatuor relicta ſunt. ſi verò nouem extrahas à duodecim,tria remanebunt. ab vndecim ſublatis nouẽ,duo ſupereſſe palàm eſt. Deinde octo à ſeptẽdecim tollantur:nouem remanebũt. octo demantur à ſexdecim,octo relinquuntur. octo ſubducãtur à quindecim,ſeptem erunt reliqua. octo auferantur à quatuordecim,ſex adhuc ſuperſunt. ſi octo deducas à tredecim,quinque manent. ſi octo à duodecim extrahas,quatuor exiſtunt reliqua. ſi octo tollas ab vndecim, tria ſunt reliqua. Rurſus ſeptem à ſexdecim tolle,nouem deprehẽdes. ſeptem aufer à quindecim,octo reperies. ſeptem ſubtrahe à quatuordecim,videbis ſupereſſe ſeptẽ. ſeptem deme à tredecim,ſex inuenies. ſeptem à duodecim demptis, quinque ſuperſunt. ſeptem ab vndecim ſublatis, quatuor relicta ſunt. Iam ſex à quindecim dẽpta,nouem relinquũt. ſex à quatuordecim ſubductis, ſuperſunt octo. deme ſex à tredecim, remanebunt ſeptem. tolle ſex à duodecim, reliqua erunt ſex. aufer ſex ab vndecim, quinque tamen ſuperſunt. Age,ſi quinque à quatuordecim ſubduxeris: nouem ſupereſſe inuenies. ſi quinque à tredecim tollas, octo deprehendes. ſi quinque à duodecim demas: reperies ſeptem. ſi quinque ab vndecim ſubducas, reliqua erunt ſex. Iam vero,ſi quatuor à tredecim deducantur: relinquentur nouẽ. ſi quatuor tollantur à duodecim,octo remanebunt. ſi quatuor ab vndecim auferantur,ſeptem erunt reliqua. Rurſus tria demantur à duodecim,nouem nobis occurrunt. ſubducantur tria ab vndecim,octo ſeſe offerunt. Denique duo ſublata ab vndecim,nobis relinquunt nouem.

Hæc,quæ pluribus verbis edocuimus, figuris annotata ſub oculis ſubiecimus.

	19	18	17	16	15	14	13	12	11	
9	19 $\frac{10}{9}$	18 $\frac{9}{9}$	17 $\frac{9}{8}$	16 $\frac{9}{7}$	15 $\frac{9}{6}$	14 $\frac{9}{5}$	13 $\frac{9}{4}$	12 $\frac{9}{3}$	11 $\frac{9}{2}$	9
	8		17 $\frac{8}{9}$	16 $\frac{8}{8}$	15 $\frac{8}{7}$	14 $\frac{8}{6}$	13 $\frac{8}{5}$	12 $\frac{8}{4}$	11 $\frac{8}{3}$	8
		7		16 $\frac{7}{9}$	15 $\frac{7}{8}$	14 $\frac{7}{7}$	13 $\frac{7}{6}$	12 $\frac{7}{5}$	11 $\frac{7}{4}$	7
			6		15 $\frac{6}{9}$	14 $\frac{6}{8}$	13 $\frac{6}{7}$	12 $\frac{6}{6}$	11 $\frac{6}{5}$	6
				5		14 $\frac{5}{9}$	13 $\frac{5}{8}$	12 $\frac{5}{7}$	11 $\frac{5}{6}$	5
					4		13 $\frac{4}{9}$	12 $\frac{4}{8}$	11 $\frac{4}{7}$	4
						3		12 $\frac{3}{9}$	11 $\frac{3}{8}$	3
							2		11 $\frac{2}{9}$	2

MVLTI qui de ſubtractione antehac ſcripſerũt, præcipiũt, quoties numerus maior in aliqua numerorum ſede deducendus eſt, quàm is à quo deduci debeat: ſtatim ab vlteriori loco proximo decem eſſe petenda, delendãque eſſe notam vnde fuerunt petita, & aliam vnitate minorem eius loco reponendam. Quòd ſi circuli ſint medij, iubent omnes eſſe delendos, & eorum loco figuras nouenarias apponẽdas. Sin vnitas ſit figura quæ decem commodat, illam in circulum mutãdam. Et quia non inutile ad multa erit quæ illi produnt cognoſcere: quanuis priores deleant notas, eorum exempla figuris annotata ſubiecimus.

2	9	10	10
3	0	1	0
1	1	1	1
1	8	9	9

Numerus ſuperior à quo deductio fieri debeat, ſignetur: tria millia & decem. inferior, mille cẽtum & vndecim. Principio quia vnũ à circulo non poſſunt deducere, decem à ſecundo loco ſumũt: & figura vnitatis ibi deleta, circulum reponunt. ab illis decem exempto vno, nouem ſuperſunt. Secũdo loco, quia vnum à circulo ſubducere non licet, & tertius itidem locus circulum habet: ex quarto loco vbi tria notata ſunt, decem petũt: & pro nota ternaria quam delent, binariam ibi reponunt, circulúmque tertij loci medium in figuram nouenariam mutant. Deinde vnum ſecundo loco extrahunt à decem: & ſub linea reponunt nouem. Tertio loco vnum auferunt à nouem. manent octo. Quarto loco vnum à duobus deducunt: & vnum quod eſt reliquum, ſub linea locant. Hæc deducendi via quanquam certa eſt, & memoriam ſeruãdis vnitatibus non onerat: numeri tamen maioris à quo fit deductio, notas confundit: vt ſi cui propter errorem in ſubducendo admiſſum repetẽdum eſſet opus, numerum primo datum agnoſcere nõ poſſet. Alij, quoties numerus ſubducendus maior eo eſt à quo fit ſubtractio, præcipiunt inferioris numeri diſtantiam à denario, ad ſuperiorem à quo fieri debet deductio, addi: & numerum ex additione illa procreatum lineæ ſubdi. Et quandocunque diſtantiam accipiunt, ſemper ſubtrahendæ proximæ figuræ vnitatem mente reconditam addunt: vt illa nota ſic aucta deducatur ab ea, quæ ſupra eam poſita eſt: idque per omnes numerorum locos ſeruant. vt ſi ſeptem à quatuor eſſent demenda: quia ſeptem à decem per tria diſtant, tria ad quatuor addunt: ſeptémque ſic procreata ſubſcribunt: & vnum mẽte ſeruatum in proximi loci numerum inferiorem, qui deducendus eſt transferunt.

3	4
9	7
	7

Si verò nota cui addendum eſt vnum memoria retentum, noue-

naria fuerit,quia vno aucta fit decem,& nihil à decem diſtat:nume rum ſupra verticem poſitum, à quo fuiſſet facta deductio, integrũ ſubſcribunt:vt ſi nouem ſecundo loco, quibus vnitas ex primo lo co ſeruata addenda eſt,ſubducenda eſſent à tribus in ſuperiore or- dine poſitis.quia nouem vno aucta fiunt decem:& nulla eſt diſtãtia quæ capi poſſit:tria,quæ ſupra verticem ſunt, ſub linea reponunt.

3	4
9	7
3	7

Sin figura cui addẽda eſt vnitas, fit circulus: cũ nihil ſit cui ad- datur:eam ipſam à ſuperiore figura auferunt,& reliquum ſubnotant.

2	4
o	7
1	7

Si verò ſuprà etiam circulus ſit:nouem,quæ diſtantia eſt à decem,lineæ ſubdunt.

2	o	4
	o	7
	9	7

Vbicunque verò ſuperior nota circulus eſt,inferior figura ſigni- ficans,diſtãtiam inferioris à decem ſubſcribunt.vt ſi duo à circulo deduci debeant, quia duo à decem per octo di- ſtant,octo ſubſcribuntur.

1	o
	2
	8

Cætera quæ tradunt,cũ his omnino conſentiunt quæ nos ſuprà præcepimus. Hic quoque ſubducẽdi modus quãuis neminẽ fallat, tamẽ dum frequenter aucupamur diſtantiã, dum eam inuẽtam ad ſuperiorẽ numerũ addimus,diu nos moratur,& pene plus de addi tione q̃ de ſubtractione refert. Quamobrẽ via per nos ſuprà tradi- ta magis erit ſequẽda:quæ cum ſit certiſſima,tum longe cæteris eſt & breuior,& expeditior:nec vllã affert ſubducẽti morã,notas quo que primas relinquit ſemper intactas:vt ſi cui ꝓpter errorẽ in ſub- trahẽdo admiſſum,repetẽdũ eſſet opus, primus numerus ante ocu- los præſto illi maneat. Quod ſiquis inueſtigare pergat quare quo- ties decẽ ab aliqua numerorũ ſede mutuamur,toties ad inferiorem ſequẽtis loci numerũ,qui deduci debeat,vnum addamus:cum pri- ma facie cuiuis videri poſſit , vnitatẽ illã ad ſuperiorẽ ſequẽtis loci numerũ à quo fit ſubtractio,poti⁹ addi debere:ne præcepta dare vi- deamur,quorũ lectori non conſtet ratio,cauſam aperiemus cur ita fieri neceſſe ſit. Nam omnis numerus vltra primũ locum vel nume ros denarios cõtinet,vel ex denarijs collectos. vnde cum in aliquo numerorũ loco maior occurrit nota in ordine inferiori,quàm quæ ex minori ſuperioris ordinis deduci poſſit:neceſſe eſt ſuperiorẽ or- dinẽ ab vlteriori aliqua numerorũ ſede eum numerũ mutuari qui ſufficere poſſit. is autẽ erit denari⁹ à ꝓxima vlteriori claſſe petitus:

qui iunctus ad minorem illũ primarium ſuperioris ordinis numerum, ad cuius acceerſitur auxilium, magnitudinem ſuperabit illius maioris numeri, qui prius à minori non potuit ſubduci. Quocirca cum denarium aliquem numerum ab vlteriori ſede petimus, illius notam ſecũdum præceptionem noſtram ibi relinquentes intactã, ſi nihil ad inferiorem illius loci figuram vnde decem ſumpſimus, adderemus, quod denarij numeri commodati notam adhuc reſtantem exhauriret, decem ibi redundarent, quæ ante memoriter fuiſſent illinc deprompta. Quamobrem, vt illa decem ſumpta mutuo, quorum adhuc figura nihil mutata ibi manet, cum ad illum locũ vẽtum erit, exhauriamus, vnitatem ſemper ad ſequẽtis loci inferiorem numerũ qui ſubducendus eſt, addimus, quæ numerum illum denarium ibi redundantem ſubducat. Idque fit per omnes numerorum ſedes, quoties decem vel ad circulum, vel ad alium primarium aſſumimus.

Siquis experiri vult an recte ſubductio facta ſit: id quod ſummæ reliquum eſt, ad numerum ſubtractum addat. & ſi ex illa numerorum adiunctione maior numerus à quo minorem ſubduximus, iterum ſurget: tum neceſſe eſt ſubtractionem recte peractã eſſe. Quod ſi alium numerum quàm eum à quo prius minorem abſtulimus, additio illa producet: errorem calculi interueniſſe palàm eſt. Nam quemadmodum totum omnibus ſuis partibus ſeiunctis par eſt: ita partes omnes compoſitæ ſuo toto ſunt pares. Cum itaque maior numerus totus à quo ſubductio facta eſt, minorem qui ſubtractus eſt, & reliquum quod ſupereſt, partes ſuas habeat: eiſque par ſit: fieri nõ poteſt quin partes illæ rurſus compoſitæ ſuum totum, id eſt primum numerum à quo minorem abſtulimus, denuo procreent. Et ſi partes illæ ſimul poſitæ alium numerum creant: error manifeſtus eſt. nam omnes partes collectas, à ſuo toto diſſidere rerũ natura nõ patitur. Vſum autem ſubductionis eſſe iam antè diximus, vt indicet quid ſit reliquum, & quantum maior numerus minorẽ ſuperet. Quod quum per præcepta quæ tradidimus inuentum fuerit, ſimul deprehenſum erit quantũ ipſi numeri inter ſe diſtabunt. Nam quantum alter numerus alterum ſuperabit, tantũ inter ſe diſtare cõperientur, vt quot vnitatibus minor à maiori ſuperatus fuerit (quod ſemper ipſum reliquum indicabit) totidem diſtent. Verbi gratia: ſume duos numeros, alterum ſeptem, alterum tria. deme tria à ſeptem, reliqua ſunt quatuor. ſeptem enim tria ſuperant quatuor vnitatibus. diſtant igitur inter ſe totidem. Quòd ſi duos nu-

meros æquales ſumas, & alterum demas ab altero: quia nihil erit reliquum, nihil inter ſe diſtabunt. Itaque ſi perſcrutari velis quantum duo quiuis numeri inter ſe diſtabunt: poſtquam altero ab altero ſubducto, comperiſti reliquum: vna opera differentiam deprehendiſti.

QVOD SI varij generis numeri ſubducēdi ſunt: deſcriptis in ſuas claſſes, vti in additione diximus, eorum generibus, veluti aureis valentibus ſingulis denarios 25 denarijs valentibus ſingulis ſeſtertios 4, ſeſtertijs valētibus ſingulis duos aſſes & ſemiſſem: cuiuſmodi ſunt vetera nummiſmata Romana: numerorū ſubductio à dextra ſumat initium: ſubtrahantúrque numeri primæ nummorū claſſis inferiores à ſuperioribus, ſi id fieri poteſt. Cæterū ſi id fieri nequit, à proxima denariorum claſſe ſumptus mutuo denarius, & in 4 ſeſtertios reſolutus, numerum ſeſtertiorum ſuperioris numeri augeat: vt tum demum inferioris ſubductioni ſufficiat. & quoties numerus aliquis mutuo ſumetur, toties ad claſſis ſequentis proximū numerum ſubducendum vnitas eſt addenda. Similiter ſi denariorū numerus ſubducendus maior ſit, quàm vt à ſuperiore demi poſſit: aureum mutuum à proxima ſiniſtra claſſe petamus: vt is in denarios 25 reſolutus, numerum denariorum, à quibus fiet ſubductio, augeat. & cum ad illam claſſem ventum erit: ad numerū proximū ſubducendum vnitatem adiungamus. Itidem fiat de quibuſcūque varijs nummiſmatum generibus cuiuſuis nationis ſubducendis, Veluti aureis, denarijs, & nummis vilioribus. Exēplum hic ſubnotauimus, quod ſolus facile ſine præeunte explicabis.

Aurus
Denarius
Sestertius

Aurei	Denarij	Seſtertij
1 1 2 3	1 2	2
4 5 6	1 7	3
6 6 6	1 9	3

DE MVLTIPLICATIONE.

MVLTIPLICATIO numerorum eſt vnius in alterū ductu tertij numeri maioris procreatio: qui toties numerum multiplicatum contineat, quoties numerus multiplicans capit vnitatem. Et vt apertius dicamus, Numerorum multiplicatio eſt maioris numeri procreatio per alicuius numeri ad ſeipſum frequentem accumulationem, crebrâmque additionem toties repetitam quoties numerus multiplicans continet vnitatem. Vſus eius

nõ modo Aſtrologis pro reductione ſignorũ ad gradus, graduum ad minuta, minutorũ ad dimidia, & ſic deinceps, verũ etiam ad vitam humanam degendam mercatoribus, & omnium hominum conditioni pernecessarius eſt: Verbi gratia, Si quis centum tritici modios, decem nummis vnumquenque: aut cẽtum vini dolia, decem aureis ſingula emit: & ſcire cupit quid ei pro vniuerſis ſit ſoluendum. In multiplicatione peragenda tres omnino numeri requiruntur, Primum numerus multiplicandus, quem per aliũ multiplicare deſtinamus. Deinde numerus multiplicans, qui toties eũ numerum quem multiplicare decreuimus, colligat, quoties in ſeipſo continet vnitatem. Nihil autem refert an minor numerus multiplicet maiorem, an è conuerſo minorem maior. Nam ex eorum mutuo in ſe ductu idem vtrobique numerus ſemper ſurget. Sicut ter ſeptem, & ſepties tria, eundem numerum creant. Facilior tamen longe multiplicandi modus eſt, cum numerus minor multiplicantis partes occupat, & numerus maior multiplicandi: quàm cum cõtrà fit. Tertius numerus quem requirimus, ex numeri multiplicantis in eum qui multiplicandus eſt, ductu, velut amborum fœtus procreatur, per multiplicationem nobis inueſtigandus. Numerus is qui multiplicat, ab eo quem multiplicare volumus, eo dinoſcitur, quòd numerus multiplicans per aduerbium ſemper exprimitur, multiplicandus autem per nomẽ. vti ſi ter ſeptem dicas, ternarius numerus multiplicãs eſt: ſeptenarius, multiplicandus. Illud in primis animaduertendum eſt: Vnum nec ſeipſum neque alium numerum multiplicare. Nempe ſemel vnũ nihil eſt niſi vnũ: quatuor ſemel, nihil amplius ſunt quàm quatuor. Et vt facillima quæque primum expediamus: Si quis aliquem numerum per decem multiplicare velit, vnum ſolum circulum à dextra ei præponat, qui ſequentem numerum augebit in decuplum. Si numerum quenuis per centum multiplicare voles, duos à dextra præpone ei circulos, & numerus qui ſequitur, augebitur in centuplum. Sin per mille numerum quemlibet multiplicare cupimus: tribus à dextra adiectis circulis, auctus eſt in millecuplũ. Atque itidem ſiquis per eum numerum, quem aliquis quantumuis vlterior numerorũ locus ſignificat, alium numerum multiplicare deſtinat: is totidem eidem aſcribens circulos, quot locum illum repræſentare poſſunt, multiplicationem abſoluet.

Principio ad numeros omnes expedite multiplicandos non parum nobis cõducet in memoria reconditum habere, quem nume-

rum ſinguli primarij infra decem, alius in alium ducti procreent: id quod ex numerorum velut in tabula depictorum quadam deſcriptione facile deprehendi poteſt. Ea autem eſt huiuſmodi, A ſiniſtra ab vno incipiens, ac naturali numerorum ſerie in dextram progrediens, ſingulos primarios vſque ad decem, modicis interuallis ſcribe. Deinde ab illo ipſo vno ad ſiniſtram poſito, velut à quodam vertice iterum incipiẽs, eandem numerorum ſeriem, deorſum verſus tendẽdo, modicis & paribus interuallis diſtingue: ſingulóſque primarios vſque ad decem ita ſcribe, vt numerorum vtraque ſeries velut Pythagoræ normam angulum rectum facientem nobis depingat. Poſtea ſub prima ſerie, quæ à læua in dextram tendit, à binario numero incipiens, aliam decem numerorum ſeriem contexe: in qua ſinguli numeri, qui in dextram progrediuntur, binarij incrementum accipiant. ea ſeries deſinat in viginti. Tertius rurſus ordo decem numerorum à ternario numero ad ſiniſtram exordium ſumens deſinat in triginta, ſingulíque numeri in dextrã protenſi incremento ternarij augeantur. Quartus itidem ordo à quaternario initium capiens, atque per decem numeros in dextrã progrediens, ſingulis auctis adijciat quaternarium, deſinátque in quadraginta. Quinta ſimiliter ſeries à quinario procedens per decẽ numeros quinario quenque auctos, finiatur in quinquaginta. Sextus ordo à ſenario ad læuam orſus, per decẽ numeros ſenario quẽque auctos, ad ſexaginta pertẽdat. Septima quoque ſeries à ſeptenario exorſa, ſingulis auctis numeris ſeptenarij incremẽtũ adijciat, in ſeptuaginta deſinens. Octauus ordo ab octonario ad octoginta perueniat: octonarij augmẽtum ad ſingulos auctos numeros accõmodans. Nona ſeries ſimiliter à nouenario progrediens ad nonaginta, per numeros decem nouenario quenque creſcentes protendatur. Decimus ordo à denario procedens ſequentes numeros, denario ſingulos augeat, deſinátque in centum. Deinde numeris ita ſcriptis, lineæ parallelæ inter ſingulos ordines directe ſic ducantur, tam à ſummo vertice ad imum cadentes, quàm trãſuerſæ à læua in dextram, vt eiuſmodi linearũ ductu ſinguli numeri quadratis locellis vbique concludantur.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

HAEC numerorum figura mira quadam proprietate primariorum numerorum multiplicationē nobis ante oculos è veſtigio demonſtrat. Nam ſi ſcire cupis quem numerum duo quilibet primarij in ſe ducti creent: primum illorum alterum in ſerie ſuprema à ſiniſtra in dextram protenſa perquire. deinde alterum veſtiga in prima ad ſiniſtrā ſerie deſcendente. quos ambos cū inueneris, ab altero inter parallelas lineas recta ſemita deſcendens, ab altero in tranſuerſum parallelas duces ſequens, progredere: donec ad linearum in quadrāgularē formā coeuntiū locellū angularē peruenias: in quo numerū quem requiris, ex amborū in ſe ductu procreatum deprehendes. Verbi gratia, ſi vis ſcire quem numerum ſepties octo procreent: in altera ſerie ſeptem, in altera octo quære: parallelaſque vtriuſque numeri, alteras deſcendentes, alteras tranſuerſas, velut duces ſequere, donec in quadrangularem coeant figuram. in cuius angulari locello quinquaginta ſex notata inuenies. Atque itidē in reliquis numeris primarijs. Verūtamē, vt ante dixi, qui ſine vlla mora numeros multiplicare velit, primariorū inter ſe multipli

cationem in memoria, velut in numero, recōditam habere debet, vt expedite, cum res poſcet, ſingulos numeros ex primariorum in ſe ductu generatos, tanquam ex theſauro depromat: id quod paucis horis quiuis vel infirma memoria facile poteſt ediſcere. Alioqui ſi ad numerorum figuram ſuprà nobis depictam identidem reſpiciendum erit: quid fiet quando librorum non adeſt copia? Ne igitur in leuiculis ſemper ſit hærendum: paucarum horarum induſtria longi temporis tedium deuoret: vt quoties vſus poſtulabit, numerorum primariorum multiplicationem mente prius repoſitam memoria ſuppeditet. Id quod ad numerorum quoque partitionem nō minus cōferet: vti latius dicemus quādo eò vētum erit.

QVÒD SI cui eſt animus eiuſmodi numerorum figuram in tātam amplitudinem dilatare, vt magnos etiam numeros per linearum inſpectionem cōpendio quodam multiplicare poſſit: Ab vno exorſus, quemadmodum antè diximus, naturalem numerorū ſeriem, quantum ei libuerit, quantúmque in immenſum velit, tam à ſiniſtra in dextram progrediens, quàm à vertice deorſum deſcendens extendat: ſingulósque contexens ordines illud ſemper obſeruet, vt à quo numero initium ſeries noua capiet, illius incremento ſinguli eius numeri ſequentes augeantur.

Præter cæteras quoque egregias huius figuræ dotes ab Arithmeticis traditas, quas nunc altius attingere noſtri inſtituti non eſt: illa inſignis habetur: Quòd ſi ab vno, qui numerus ad læuam ſummus eſt, ad centū qui ad dextrā habetur imus, per angulos oppoſitos linea ducatur: numeri omnes quos ſecabit, quadrati reperientur, qui ex cuiuſque eorum in ſeipſum ductu procreātur. id quod eueniret, ſi quantumuis in immenſum pertenderet figura. Ad hæc vbicunque occurrunt numeri quadrati, idem ex ductu angulorū oppoſitorum in oppoſitos producetur, vt ſi tria per tria multiplicentur, perinde fit acſi vnum in nouem ducatur. quod quia ad radicum in numeris inueſtigationē, (de qua ſuo loco dicturi ſumus) pernouiſſe eſt vtile: hîc deguſtaſſe, non alienum eſt viſum.

QVI de numerandi ſcripſerūt arte, de ſimplicibus numeris inter ſe multiplicandis, certam hanc dederunt regulam: quæ ſanè & breuis eſt, & ſupputationem auſpicātibus admodum vtilis: vt duo quiuis numeri primarij multiplicandi ſumantur: maioriſque numeri, ſi alter maior fuerit, à denario diſtantia capiatur. Deinde quot in ea diſtantia reperientur vnitates, toties minor numerus à ſuo denario quem ipſe denominat, ſubtrahatur: & numerus reli-

ctus erit is quem quærimus. Verbi gratia, Scire volens quotũ numerũ componat quinquies ſeptem: ſume tria, diſtantiam ſeptenarij, qui maior eſt numerus. ac ter aufer quinque, numerum minorem, à denario, quẽ denominat, hoc eſt à quinquaginta. ſuperſunt triginta quinque: quæ ex horum in ſe ductu procreantur. Sin numeri æquales fuerint: nihil refert vtrius à denario diſtãtiã aſſumas: vt quot in ipſa diſtantia deprehẽdas vnitates, toties à denario, quẽ alter denominabit, alterũ numerum demas. vti ſi octies octo multiplicandi ſunt: ſume duo, diſtantiam vtriuſque à denario: bíſque aufer octo ab octoginta. reliquũ erit ſexaginta quatuor. is eſt numerus quem requirimus, ex illorum in ſe ductu generatus. Alij autem ad multiplicationẽ numerorũ primariorum, quorum duo quiuis additi maiorem denario numerum procreant, aliã docuerunt regulã: vt vterque numerus ad ſiniſtrã, alter ſub altero ſcribatur. deinde vtriuſque à denario diſtãtia ẽ regione ad dextram ponatur: diſtantiæque altera per alteram multiplicentur: & quod productũ erit, ſub linea ducta notetur. Deinde alterutrius diſtantia ab altero ſubtrahatur: & prius adiecto, ſiquid memoria ſeruat, ſubſcripto numero, ex diſtantiarũ in ſe ductu procreato, à ſiniſtra locetur. vti ſi ſexies octo multiplicare velis: ſuprà octo, infrà ſex repone. Poſtea cõtra octo oppone pro diſtantia ad dextram duo. cõtra ſex oppone quatuor. duc poſtea duo in quatuor: fiunt octo. ea ſubſcribãtur. Exime deinde per oppoſitos angulos, vel duo à ſex: vel ſi mauis, quatuor ab octo. ſuperſunt quatuor. ea à ſiniſtra numeri prius ſubſcripti locentur. Quod ſi numeri primarij ſimul additi numerũ denarium non trãſcendãt (hi autẽ ſunt omnes minores infra ſex) eos ſine vllo præcepto pueri plerique omnes multiplicare ſciunt.

NVMEROS multiplicaturi, ſupremo loco eum ſcribamus quẽ multiplicare deſtinamus: tum deinde inferius alterum per quem multiplicare ſuperiorem volumus, ita reponamus, vt primarij numeri illius ordinis primarijs ſuperioris, deni denis, centeni centenis, & ſic deinceps reſpondeant. Et ſi numeri ſint inæquales: maior ſemper ſuprà pro multiplicando ponatur, minor infrà pro multiplicante. Quo fiet, vt multiplicationis modus ſit expeditior. Poſtea ſub ambobus numeris à læua in dextram calamo linea ducatur.

4	2	3
	1	2

Deinde prima nota multiplicantis numeri in primã multiplicãdi ducatur: & ſi id, quod ex multiplicatiõe proueniet, infra decem erit, ad dextram primo loco ſub linea reponatur.

3
2
6

Si verò ſurgat numerus aliquis ex denis collectus:ſubſcriba tur circulus:& denorũ illorum denominatio memoriæ commendetur,ad ſequentis loci multiplicationem addenda.

5
4
2 0

SIN PRODEAT numerus aliquis ex denis & primarijs compoſitus:primarius primo loco deponatur,denorũmque denominatio mente recondatur: vt ad ſequẽtis loci numerum ex multiplicatione procreandum coniungi poſſit.

5
3
5

Iterum nota prima numeri multiplicantis ducatur in multiplicandi ſecũdam:& quod inde creatum erit, poſtquam ei additum fuerit id quod mente retẽtum eſt, ſi quid tale ex priore loco tranſlatum ſupereſt, ſecundo loco ſubſcribatur.

2	5
	3
7	5

Rurſus eodem modo in tertiam,quartam, & reliquas quantum libet vlteriores multiplicandi numeri figuras eadẽ prima nota numeri multiplicantis ducatur: & quod ex ipſis in ſe ductis creabitur,eiſdem locis ſub linea reponatur quibus enatum erit. Demũm prima illa multiplicantis nota,quæ ſuum peregit opus:ne amplius turbam faciat, obeliſco tranſfigatur.

2	1	2	5
			3
6	3	7	5

Poſt hæc ſecunda numeri multiplicantis nota in primam multiplicandi,& deinceps in omnes reliquas,eo ordine,eodémque modo ducatur quo de prima nota fieri debere diximus. Et numeri ex eorum in ſe ductu prouenietes ita ſub linea & ſub figuris ex priore multiplicatione productis ponantur, vt primus eorum ſub ſecunda multiplicantis nota, ſecundus ſub tertia, tertius ſub quarta,& ſic deinceps in ſiniſtram procedẽdo locetur. Et quanuis pauciores notæ numeri multiplicantis, quàm multiplicãdi fuerint:ſemper tamẽ progreſſus in læuam à ſecunda nota multiplicantis exorſus,minimum per totidem ſeruetur locos, quot figuræ fuerint in numero multiplicando. poſtea ſecunda nota ſuum enixa fœtum calamo tranſfigatur.

	2	1	2	5
			1	3
	6	3	7	5
2	1	2	5	

Tertia deinde & quarta ac reliquæ omnes, quotquot fuerint multiplicãtis numeri notæ in ſingulas multiplicandi numeri eodem modo ducendæ ſunt: numerique ex multiplicatione naſcentes ſub linea & ſub ordinibus ex priore multiplicatione procreatis ita reponendæ,vt tertiæ notæ multiplicantis fœtus à tertio loco,quartæ à quarto,& ſic deinceps, progreſſionis in ſiniſtram ca-

piat exordium:per totidémque notas minimum protendatur, quot reperientur in numero multiplicādo. Singulæque notæ, poſtquam officio ſunt functæ, obeliſcis inductæ calamo tranſfigantur.

```
   2125
   1213
   ----
   6375
  2125
 4250
2125
```

Peracta demum figurarum omnium multiplicatione, rurſus ſub omnibus numerorum ordinibus ex multiplicatione procreatis altera linea à læua in dextram ducta, ad primum locum pertendat. Deinde à primo loco exorſi, omnes illos numeros ex figurarum in ſe ductu natos ſimul addamus, numeróſque ex locis ſingulis collectos eiſdē locis ſub linea ſubſcribamus. Ita numerus ſub linea repoſitus is erit quē multiplicatio nobis procreabit.

```
   2125
   1213
   ----
   6375
  2125
 4250
2125
-------
2577625
```

De circulis autem illud præmonendum putamus, vt quoties in numero multiplicante nobis occurrit circulus, totidē ſub linea circulos reponamus quot fuerint figuræ numeri multiplicandi.

```
123
 10
---
000
```

Quod ſi numerus multiplicandus circulum aliquem habeat, is etiam ſub linea ſuo ponatur loco: niſi aliquid in memoria retentum ſuperſit quod illic deponi debeat.

```
102   104
 13    13
---   ---
306   312
```

NVNC EA quæ diximus, illuſtremus exemplis.

Multiplicemus ſeptem milia noningenta ſexaginta tria, per mille octingēta quinquaginta duo. Poſtquam numeri ſcripti, ſubiectáque linea fuerit: ſic nobiſcū tacite meditemur, Primo loco bis tria creāt ſex. ea ſub linea primo loco notamus. Iterum bis ſex faciunt duodecim. duo ſub linea ſecundo loco ponimus: vnum pro denarij denominatione mente retinemus. Rurſus bis nouem procreāt decē & octo. quibus vnum ex memoria addimus: fiunt decē & nouem. nouem igitur tertio loco lineæ ſubdimus: vnum mente recondimus. Demum bis ſeptem producunt quatuordecim, quæ quum augentur, vno ex memoria deprompto, fiunt quindecim. ſic quinque quarto loco reponimus: vnitatem in quintū locum trāſ-

```
    7963
    1852
   -----
   15926
  39815
 63704
7963
--------
14747476
```

ferimus: atque ita primam illam notam multiplicantis numeri, quæ ſuum peregit opus, obeliſco tranſfigimus. Poſtea ſecundam multiplicantis notam, nempe quinque, in primam multiplicandi ducamus, intra nos ita muſſitantes, Ter quinque creant quindecim. quinque ſecundo loco ſub linea ponimus: vnum mente ſeruamus. Iterum, quinquies ſex faciũt triginta. quibus vnum ex memoria depromitur, fiunt triginta vnum. ex his vnum tertio loco reponimus: tria mente ſeruantur. Rurſus, quinquies nouem producunt quadraginta quinque: quibus tria ex memoria addita, quadraginta octo faciũt. octo quarto loco ſubſcribimus, quatuor mẽte retentis. Demum quinquies ſeptem ſunt triginta quinque. his ex memoria quatuor adiungantur: fient triginta nouem. ea ſub linea ponantur ad ſiniſtram. ita ſecunda multiplicantis nota ſuum enixa fœtum obeliſco ſignatur. Tertiam deinde multiplicantis figuram aſſumentes, ſic ducimus in primam multiplicandi, Octies tria ſunt viginti quatuor. quatuor tertio loco lineæ ſubdimus: duo mẽte retinem⁹. Iterũ, octies ſex ſũt quadraginta octo. ad quæ duobus ex memoria additis fiunt quinquaginta. circulus igitur quarto loco ſubſcribitur: & quinque memoria ſeruat. Rurſus, octies nouem ſunt ſeptuaginta duo: quibus memoria ſumminiſtrat quinque, ſic fiunt ſeptuaginta ſeptem. ſubnotantur ſeptem loco quinto, depoſitis apud memoriam ſeptem. Denique octies ſeptem ſunt quinquaginta ſex: ad quæ quum ſeptem ante repoſita iunguntur, proueniunt ſexaginta tria. ea ſexto & ſeptimo loco ſubſcribuntur: tranſfigitúrque ita calamo tertia multiplicantis figura. Tandem ventum eſt ad quartam & poſtremam multiplicantis notam: quæ cum ſit vnitas, & nullum numerum multiplicare poſſit, omnes figuræ numeri multiplicandi, eo ordine quo ſunt ſcriptæ, ſemel ſub reliquis enatorum numerorum ordinibus ſic ponantur, vt prima quarto loco ſub ipſa vnitate notetur: reliquæque omnes in ſiniſtram, nempe ſecunda in quintum locum, tertia in ſextum, quarta in ſeptimum, promoueantur. His ita peractis, ac ſub omnibus enatis numeris linea à læua in dextram ad primum vſque locum perducta, vniuerſorum numerorũ ex multiplicatione prouenientium ſumma collecta ſub linea deponatur. ea erit, Quater decies millena millia, ſeptingenta quadraginta ſeptem millia, quadringenta ſeptuaginta ſex.

SED quoniam in hoc exemplo quod iam explicauimus, nulli interuenerunt circuli: alterum adiungamus, in quo tam in nume-

ro multiplicante,quàm multiplicando,circuli ſint admixti.id autem ſit eiuſmodi. Multiplicemus ſexaginta millia quingenta tria, per quatuor millia &viginti. Poſt numeros ſcriptos lineámque ſubiectã, primũ nobis occurrit in numero multiplicante circulus.totidẽ igitur circulos ſub linea reponamus quot ſunt notæ numeri multiplicãdi. Deinde ſecunda nota multiplicantis in primam multiplicandi ducatur,inde ſex enaſcentur.ea ſecũdo loco ſubſcribantur. Et quia ſecunda figura numeri multiplicantis circulus eſt,ex quo nihil gigni poteſt:is tertio loco ſubnotetur. Rurſus ſecunda multiplicantis nota in tertiam,nempe quinque,ducatur: & fient decem. ſubijcitur igitur quarto loco circulus, vnúmque memoriæ ſeruãdum commendatur. Et quia quarta figura numeri multiplicandi circulus eſt, & vnum adhuc memoria ſeruat: id ſub linea quinto loco reponatur. Deinde ſecunda ipſa multiplicantis nota in quintam multiplicandi,nempe ſex,ducta,duodecim proueniunt.ea ſexto & ſeptimo loco ſtatuantur. poſtea ſecunda ipſa multiplicantis nota ſuo functa officio calamo tranſfigatur. Iterum tertio loco in numero multiplicante alter occurrit circulus. quamobrem totidem circuli quot reperiuntur figuræ numeri multiplicandi,à tertio loco incipientes,in læuam promouentur. Quarta nota numeri multiplicantis quaternaria in primam multiplicandi ternariam ducta duodecim producit.duo quarto loco ſubſcribuntur: vnum mente reconditur.& quia ſecunda numeri multiplicandi figura circulus eſt,vnum illud mente retentum quinto loco deponitur. Rurſus quarta multiplicantis nota in tertiam , videlicet quinque , ducitur. prodeunt viginti. circulus itaque ſexto loco ſubditur,duobus memoria repoſitis . Et quia in numero multiplicando alter itidem circulus eſt obuius:duo illa mente recõdita ſeptimo loco ſub linea locãtur. Demum quarta nota numeri multiplicãtis in quintam & poſtremã multiplicandi ducatur: & enaſcẽtur viginti quatuor.ea octauo loco & nono deponantur. Poſt abſolutam multiplicationẽ,ſub omnibus ordinibus linea perducatur,ſub qua vniuerſorum fœtuũ collecta ſumma cõtinebit, Ducenties quadragies ter millena millia,ducenta viginti duo millia,& ſexaginta.

```
          6 0 5 0 3
            4 0 2 0
          ---------
          0 0 0 0 0
      1 2 1 0 0 6
      0 0 0 0 0
2 4 2 0 1 2
-----------------
2 4 3 2 2 2 0 6 0
```

Quæret fortaſſe quiſpiã,cur ita ſinguli numeri ex multiplicatione

procreati ſemper ad læuã oblique promoueantur: & nõ potius di recte ſub numero multiplicãdo collocẽtur. Sed quiſquis multiplicationis naturã altius conſyderabit, ſtatim mirari deſinet. Nã cum multiplicatio toties numerũ qui multiplicatur, ſibi ipſi addat atque accumulet, quoties numerus qui eũ multiplicat, continet vnitatem: oportet omnino alium numerum maiorem inueſtigari, ad quem is qui multiplicatur, vicem habeat vnitatis. Et quoniã vnitas natura primũ in numeris locum tenet, ſequentes autem eam numeri in vlteriores ſedes ſecundum ſui augmentum truduntur: quiſquis numerus vnitatis vicem occupabit, is primam itidem ſedem habeat neceſſe eſt, & quæ ipſum ſequuntur in vlteriores ſedes promoueat. Cum itaque numerus multiplicans nõ ſolum in omnes multiplicandi notas ducatur, verũetiam ei leges præſcribat quoties ad inueſtigationẽ numeri maioris, vnitatis vicem ſit ſubiturus: neceſſe eſt omnino & tot maiorũ numerorum procreãdos ordines poni, quot ſunt notæ numeri multiplicãtis: & rurſus illos ipſos ordines à ſingulis numeri multiplicantis notis quæ repræſentandis vnitatibus legem dant, nouas ſubinde primas ſedes accipere. Atque ita ſi primus locus qui dux cæteris eſt, ab ea ſede incipiet vbi nota multiplicans ſita eſt, ſiue ſecunda, ſiue tertia, ſiue vlterior fuerit: omnes omnino loci, qui eius ductum ſequuntur, vlteriores erunt. Et cum maiores numeri ex notarum in ſe ductu ſemper quærantur: ſtatim vt ſunt inuenti, in ſiniſtram, quæ maiorum numerorum ſedes eſt, promoueri debent.

Multiplicationem recte factam eſſe certa ratione probabimus, ſi numerus ex multiplicatione procreatus per numerum multiplicantem diuidatur, & ſectio nobis numerum qui multiplicatus eſt, inſtauret. Quòd ſi alium numerum reddat, erratum eſſe neceſſe eſt. Hoc autem manifeſtius fiet, poſtquam numerorum partitionem explicuerimus.

DVPLICATIO numerorum eſt eorum per duo multiplicatio. Fit autem quando nota binaria poſita ſub primo loco numeri multiplicandi, ducitur in omnes eius figuras eo modo quo antè dictũ eſt. de qua, cum ſit ſpecies multiplicationis atque ea quidem lõge omniũ facillima, nihil attinet ſeparatim præcepta dare, ſicut quidam fecerunt: non magis quàm de triplicatione, quadruplicatione, reliquiſque multiplicationis ſpeciebus, quæ ſunt infinitæ. De quibus adhuc nemo quicquam ſpeciatim edidit. quanquam in multis earũ, quòd ſint difficiliores, maior videri potuiſſet

ratio ſiquis id attigiſſet. Verũ in his omnibus quomodo multipli catio ſit facienda: ea, quæ iam dicta ſunt, abunde ſumminiſtrant.

DE PARTITIONE.

PARTITIO numerorũ eſt numeri diuidendi per numerum diuiſorem ſectio in quaſuis partes: quarum quælibet toties cõtineat vnitatem, quoties numerus diuidendus capit diuiſorem. Numerus autem diuiſor, vel minor diuidendo, vel ei æqualis eſſe debet. Porrò maior numerus non diuidit minorẽ: cum in minore maior nõ contineatur. Et vt manifeſtius ſectionis naturã explicemus, Numerorum partitio eſt partium quarumuis, quotæcunque fuerint, procreatio ex numeri diuidẽdi ſectione per numerũ diuiſorem, partes illas quas quærimus, denominantem. Quantitas autem illarũ partium ita deprehenditur: ſi à numero, qui diuidendus eſt, diuiſorem toties ſubtrahamus quoties fieri poteſt, diligenter obſeruantes quoties id faciemus. nam quoties ſubtractio repetita erit, toties numerus quem quærimus, vnitatẽ continebit. Ita nihil aliud eſt numeros partiri, quàm per numeri diuiſoris crebram, ab eo qui diuiditur, ſubductionem, tertium numerũ procreare: qui ex tot cõſtet accumulatis vnitatibus, quot repetitis iterationibus diuiſor numerus à diuidẽdo ſubductus eſt. Partitionis enim officium eſt, nobis aperire quantum quælibet pars numeri diuidendi, quotacunque ſit, in ſe cõtinet, & quoties in numero diuidendo numerus diuiſor includitur.

QVEMADMODVM autẽ in multiplicatione prædiximus non mediocriter cõducere ſiquis memoria teneret quos numeros procrearent primarij numeri in ſe ducti: ita hoc loco admonendum putamus, numeros partituris ſuprà quàm dici poteſt, conferre, ſi ſine vlla mora dicere poſſint quibus ex numeris compoſiti ſint, quáſque in partes ſoluantur ſinguli numeri ſub centum. Nam ſicut primariorum inter ſe multiplicatio numeros maiores creat, quorum tamen maximus centenarium nõ tranſcendit: ſic è conuerſo procreatorum ex primarijs numerorũ partitio ipſos in partes, ex quibus conſtant, diſſoluit: numeróſque oſtendit minores, ex quibus maiores ſunt accumulati. Et quanuis ſufficere poſſit ad vtrunque pernoſcendũ multiplicationis tabula ſuprà à nobis deſcripta, ſiquis eam ordine retrogrado conſyderet, & ab imis & maximis numeris cõtemplari incipiens ad ſummos & minimos tendat: tamen quo magis rem ſubijciamus oculis, quódque pro faci-

liori partitione mente cõcepimus, exprimamus, aliam partitionis tabulam non abſimilem, ordine tantũ numerorum conuerſo, deſcribemus. quæ in ſumma parte, & ad ſiniſtram numeros maiores, in ima & ad dextram minores cõtineat. Ea fiet ad hunc modum, Ab ima parte ab vno incipientes, naturalíque numerorum ſerie in læuam progredientes, ſingulos primarios vſque ad decem modicis interuallis ſcribamus. Iterũ ab illo ipſo vno ad dextram repoſito, velut à quadã baſi capientes exordium, eandem numerorum ſeriem ad decẽ vſque ſurſum verſus aſcendendo, modicis & paribus interuallis diſtinguamus: vt velut normã quandam rectũ habentem angulum vtraque ſeries referat. Deinde ſingulos ordines ſtruentes illud obſeruemus, vt à quo numero initium ſeriei alicuius ſumemus, ſiue binarius, ſiue ternarius, ſiue vlterior fuerit: eius incremento ſingulos eum ſequentes numeros in ſiniſtrã promotos augeamus. Parallelæ deinde lineæ inter ſingulos ordines ductæ tã à ſummo faſtigio ad imũ cadentes, quàm tranſuerſæ à læua in dextrã, ſingulos notatos numeros quadratis includant locellis.

100	90	80	70	60	50	40	30	20	10
90	81	72	63	54	45	36	27	18	9
80	72	64	56	48	40	32	24	16	8
70	63	56	49	42	35	28	21	14	7
60	54	48	42	36	30	24	18	12	6
50	45	40	35	30	25	20	15	10	5
40	36	32	28	24	20	16	12	8	4
30	27	24	21	18	15	12	9	6	3
20	18	16	14	12	10	8	6	4	2
10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

ITA CONTRA quàm in multiplicationis tabula deſcriptum eſt,ſummas & ſiniſtras partes maiores numeri ſtatim oculis occurrentes tenebunt. Quorum ſiquem per minorem partiri volemus, parallelas à maiori numero diuidendo, tam ad imum marginem, quàm ad dextrum latus ducentes, oculis ſequamur: vbi ſe nobis contuendos offerent numeri (ex quibus cõſtat)minores. quorum alter diuiſor erit,alter qui nobis indicet quoties à diuidendo diuiſor ipſe ſubductus eum totum exhauriat. Verum enimuero quiſquis huius tabellæ deſcriptæ vim memoria reconditã tenet, vt nõ ſolum quos numeros generent multiplicati primarij,dicere expedite poſſit:ſed etiam in quos primarios generati ipſi ſoluantur(id quod plurimum bidui exercitatione cuiuis licet aſſequi)is ſine vlla mora, numeros quantunuis magnos in partes quaſcunque velit facile partietur.Idque ita eſſe argumẽto eſt,quòd qui alioqui in diuidendis numeris hærent,propoſita multiplicationis tabella ſeſe confeſtim explicant.quam ſi ordine retrogrado mente repoſitã haberent,nihilo facilior illis eſſet multiplicatio quàm partitio.

MODVS autem expeditus quoſcũque partiendi numeros eiuſmodi eſt,vt primùm numerus diuidẽdus à dextro latere ſcribatur, & ab eius ſiniſtra numerus diuiſor.inter quos linea cadens media ponatur.Deinde ſub numero diuidẽdo duæ lineæ parallelæ modico interuallo inter ſe diſtantes à læua in dextrã ducantur.ſub quibus iterum diuiſor numerus ſic ſubnotetur,vt vltima nota diuiſoris ad ſiniſtram ſub vltima diuidẽdi,& penultima ſub penultima, & ſic deinceps locetur. Atque id quidem ita fiet,ſi totus numerus diuiſor à diuidendi notis ſupra ſe repoſitis ſubduci poteſt.

CAETERVM ſi maior fuerit diuiſor, quàm diuidendi numeri notæ ſupra ſe locatæ,vt ab his non poſſit totus ſubtrahi:tunc poſtrema diuiſoris figura ſub penultima diuidendi ponatur.

HIC quidem numerus parallelis ſubiectus, diuiſor ambulans non abs re dici poteſt: quòd ad ſiniſtram ſemper incipiens, poſtquam à diuidendo numero ſubductus eſt,figuris ſuis deletis progrediatur ad dextram. ille verò ad læuam lineæ cadentis poſitus, diuiſor ſtans non immerito vocatur, quòd manens nos admoneat quis numerus ſit diuiſor. Inter parallelas verò numerus is ponatur medius, qui nobis indicat quoties in diuidendo numero diuiſor continetur,vt ab illo toties huius fiat ſubductio. vulgus hunc numerum quotientem barbare vocat,participium effingens ab aduerbio. is nobis videtur apte appellari poſſe numerus

partitionis,aut ſi mauis, numerus ſectionis, quòd ex maioris numeri ſectione generetur.

ET VT à facillimis primùm incipiamus:Si quem numerum in decem partes diuidere volemus,primam à dextra parte notam,per lineam cadentem mediam ſeparemus à cæteris:& peracta eſt partitio. ſi in centum:duas primas ſeiungamus notas.ſi in mille:ſeponamus tres. ſi in decem millia:quatuor diſtinguamus. Et vt in vniuerſum præcipiamus, Quandocunque maiores numeros partiri volumus, per minorem numerũ vnitatis nota & vno circulo aut pluribus ſcriptum , quem aliqua numerorum ſedes ſignificat, totidem à dextra per lineam cadentem notas ſeparemus, quot locum illum præcedunt.& abſoluetur partitio.Notæ autem à cæteris ſeparatæ reliquum indicabunt quod ex diuiſione ſupereſt: & ſupra diuiſorem ſtantem linea interpoſita notentur.is locus eſt eius reliqui,quod poſt partitionem peractam remanebit. Id ita eſſe palàm eſt.nam ſi vna nota ad dextram appoſita ſequentem numerum vltra id quod ipſa ſignificat,augebit in decuplum, duæ additæ eodem modo in centuplum, tres in millecuplum , & ſic deinceps:illæ ipſæ ſublatæ datum incrementum omnino tollent.

SI VERÒ diuiſor numerus per quem partiri velis,vnicam notam habet , is ſub vltima diuidendi numeri figura , ſiue ipſi diuidendo æqualis, ſiue eo minor fuerit,ponatur. Et ſi diuiſor ipſe diuidendo numero æqualis erit:quia tantũ ſemel ab eo ſubduci poteſt:vnitatis nota ſub diuidẽdo inter parallelas inſeratur. Statimque tam diuiſor ſub lineis , quàm prima diuidendi figura calamo transfigatur: & diuiſor in dextrã ambulans ſub penultima diuidẽdi nota iterũ reponatur. Quòd ſi diuidendo numero minor erit diuiſor,cõſyderandũ erit quoties diuidendus eum cõtineat, an ſemel,an bis,an ſæpius,numerúſque id indicans inter lineas parallelas ſub diuidendo ponatur.ſi ſemel, vnitatis nota reponenda. ſi bis:nota binarij.ſi ter,ternarij.& ſic deinceps. Tum per illum numerũ inter parallelas repoſitũ diuiſor multiplicandus eſt, numerúſque ex multiplicatione proueniens ſub parallelis infra diuiſorem(prius tamẽ,ne rationes cõturbet,deletũ)ponatur. iſque numerus à diuidẽdo ſupra parallelas locato ſubducat. & ſiquid reliquũ erit,ſupra diuidẽdi figuras,à quibus fit ſubtractio,prius deletas ne rationẽ cõturbent,ſcribatur. Quo facto,deleatur etiã numer⁹ ſubductus ſub parallelis repoſit⁹: & diuiſor in dextrã progrediẽs ite-

rum ſub penultima diuidendi figura locetur. Vbi animaduertendum erit, quoties penultima diuidendi cum toto reliquo ſupra vltimam diuidendi poſito (ſi quod fuerit) contineat diuiſorem. Ipſum autem reliquum ad reſpectum penultimæ diuidendi, & quoties in progreſſu occurret, ad ſequentium reſpectum, denarium illum numerum quem nota ipſum exprimens denominat, ſemper ſignificabit: vt ſi vnitatis nota in reliquo ſit, decem exprimat: ſi binarij, viginti: ſi ternarij, triginta: & ſic deinceps. Numerus verò ipſe indicans, quoties penultima diuidendi cum reliquo capit diuiſorem, inter parallelas eſt reponendus. Illud tamen perpetuo eſt obſeruandum, Quandocunque diuiſor in diuidendo ſæpius quàm nouies continetur, nouem inter lineas tantum ſunt reponenda. Per numerum autem ipſum inter parallelas poſitum multiplicãdus eſt diuiſor: & numerus ex eo proueniẽs, ſi vna nota ſcribi poſſit, ſub diuiſore prius deleto, ne rationes conturbet, reponatur.

SIN numerus ille proueniens ex denario & primario ſit cõpoſitus, vt duabus notis ſignari debeat: primarius ſemper ſub diuiſore ponatur: denarius autem ab eius ſiniſtra ſub reliquo diuidendi, ſi quod fuerit, aut ſub alia ipſius diuidendi figura ſupra ſe poſita ſtatuatur. numerúſque is ab ipſis diuidendi figuris ſupra ſe poſitis ſubducatur: poſtea deleantur notæ, tam quæ ſubductæ ſunt, quàm à quibus fit deductio. & ſiquid ex hac ſubductione iterum erit reliquum, ſupra penultimam diuidendi notetur.

DEINDE diuiſor in dextram obambulans ſub nota proxima penultimæ diuidendi rurſus collocetur: & itidem per omnia fiat quemadmodum in penultima. Atque ad hunc modum diuiſor promoueri debet, donec ad primam diuidendi figuram ventum erit: vbi ſiquid ex deductione reliquum ſupererit, id ſupra diuiſorem ſtantem linea interpoſita notetur. qui locus eſt eius reliqui quod poſt diuiſionem peractam remanet. quod certe ſemper minus erit quàm diuiſor, niſi in partitione fuerit erratum.

Quotieſcunque autẽ poſt priorem ſubductionem inter partiendum cõtinget diuiſorẽ maiorem eſſe notis diuidẽdi ſupra ſe locatis, vt ab his ſubduci nõ poſſit, toties inter lineas circulus ponatur. & per vnum locum progrediatur diuiſor, notæque illæ diuidendi, à quibus fieri ſubductio non potuit: ad reſpectum illius, ſub qua diuiſor locatus eſt, vel denorum, ſi in ſecundo ab ea loco, vel centenorũ, ſi in tertio poſita fuerint: in ſequenti diuiſoris ſubtractio-

ne ſemper habebũtur. Et vt magis ea quæ diximus aperiam⁹ exẽ-plo, diuidamus ſeptem millia octin-genta viginti quinque per ſex. Scri-ptis primũ diuidendo & diuiſore cũ parallelis medijs, eo modo quo dixi-mus: ſic partitur⁹ ſecũ cogitet, Sex in ſeptem ſemel tantum reperio. vnitatis igitur notã inter parallelas repono. & quia illa vnitas, ſex non multiplicat: ipſa ſex ſubduco à ſeptem: ſupereſt vnũ reliquum. id ſupra ſeptem calamo tranſfixa ſtatuo. deleóque ſex diuiſorẽ: & ſub penultima diuidẽdi iterum ea pono. Ibi occurrũt in reliquo & penultima diuidẽdi, decẽ & octo. ſex in his ter habentur. igitur tria inter parallelas depono: per quæ multiplico ſex, & fiunt decẽ & octo. decem ſub reliquo, octo ſub diuiſore prius deleto ſtatuo. deinde octo ab octo ſubduco, & nihil ſupereſt. vnitatis autem notã decem repræſentantem ſubtraho ab vno ſupra ſe poſito reliquum ſignante. Iterũ promoueo diuiſorẽ, & ſub proxima penultimæ eum colloco. ibi quia diuiſor maior eſt diuidendo, circulũ inter lineas inſero: deleóque diuiſorem, ac rurſus ſub prima diuidẽdi figura eum repono. Illic in diuidendo, vi-gintiquinque deprehendo. quorũ viginti ideo manent, quia diui-ſor proxime, cum circulus lineis eſt inſertus, ab his ſubduci nõ po-tuit. in quibus, quia quater ſex habentur, quatuor inter lineas ſcri-bo: per quæ multiplico ſex, & fiunt viginti quatuor. Itaque ſub di-uiſore deleto, quatuor ſubnoto: & ſub proxima diuidendi ſequen-te pono notã binarij, quæ viginti ſignificat. tunc quatuor à quin-que in diuidẽdo numero ſupra ſe repoſitis deduco: & vnũ ſuper-eſt. duóque à duobus demo. poſtea tranſfigo calamo tam ſubdu-ctos numeros, quàm à quibus ſubducti ſunt. Vnúmque quod poſt diuiſionem peractam manet reliquum, ſupra diuiſorem ſtantem linea interpoſita colloco. Ita numerus indicans, quoties facta ſit ſubductio, ſurgit inter lineas, Mille trecenta quatuor.

1	1			1
6	7	8	2	5
	1	3	0	4
	6	6	6	6
	1	8	2	4

PRAETEREA ſi diuiſor numerus vnicam notam ſignificãtem cum vno circulo aut pluribus habeat, totidem diuidendi numeri figuras linea cadente interſerta ſeparemus à dextra, quot circuli in diuiſore notã ſignificantem præcedunt. Deinde per illam ſignifi-cantem notam ſolam amotis circulis, diuidendũ numerũ eo mo-do partiamur, quo cũ vnica nota fieri debere diximus: præterquã quòd partitio, cũ ad ſeparatas per lineã figuras ventum erit, ceſſa-bit. & ſiquid reliquum ſupereſt ex ea diuiſoris ſubductione, quæ à

figura diuidendi proxime ſeparatas præcedente facta eſt, id vnà cum ipſis figuris ſeparatis totius partitionis reliquum erit. Atque ideò ſupra diuiſorem ſtantem, linea interpoſita, notetur.

```
    1 2 1 |     1 |
    2 0 0 | 4 3   | 2 1
            2 1
            2 2
```

QVOD SI diuiſor numerus duas aut plures habeat ſignificãtes notas, vnũmque aut plures in fine circulos: totidem in diuidendo numero ſimiliter à dextra ſeparandæ ſunt figuræ, quot circuli in diuiſore figuras ipſas antecedunt: & per illas ſignificantes notas ſolas amotis circulis, diuidendum numerum eo modo partiri oportet, quo cum pluribus notis fieri debere mox præcipiemus. ceſſétque partitio quando ad ſeparatas figuras veniemus: quas, vti iam dictum eſt, aſcribemus in reliquum.

```
    3 2 1   | 1 8     |
  1 2 0 0   | 5 6 4 3 | 2 1
              4 7 0
              1 2 2 2
              1 1
```

QVANDO autem diuiſor duas aut plures ſignificantes notas habet: ſub diuidendo numero ductis parallelis ita ſingulæ ſcribantur, vt vltima diuiſoris ſub vltima diuidendi, penultima ſub penultima, & ſic deinceps, omnino reponantur. niſi totus diuiſor numerus maior eſſet totidem diuidendi figuris ſupra ſe locatis, vt ab his ſubduci non poſſet. nam tunc diuiſoris vltima ſub penultima diuidendi, & penultima ſub antepenultima, in initio ſtatui deberet, ſicuti antè dictum eſt. Quo peracto, conſyderandum eſt vtrum quoties vltima diuiſoris in vltima diuidendi ſupra ſe poſita reperitur, toties diuiſoris penultima in diuidendi penultima, & reliquo vltimæ, ſiquod poſt diuiſoris ſubtractionem ſupererit, & antepenultima diuiſoris in antepenultima diuidendi, & reliquo, ſiquod erit, & ſic per cæteras diuiſoris notas reperiri poſſit. & ſi id poſſit fieri, numerus indicans quoties diuiſor continetur, inter parallelas ponatur: & per eum ſingulæ diuiſoris notæ multiplicetur, ſuo quæque ordine: numeríque ex multiplicatione prouenientes ſub ipſis multiplicatis diuiſoris notis ſic ponantur, vt ſi figuris pluribus ſcribendi erunt, prima earum ſub nota multiplicata, reliquæ poſt eam ſuo ordine locentur. ſingulíque numeri à

figuris diuidendi ſupra ſe poſitis, & à reliquo, ſi quod erit, ſubducantur: deletis tam diuiſoris quàm diuidendi notis, eo modo quo antè dictum eſt cum de diuiſore vnicam notam habente præciperetur.

3	2	1	9	6	3
			3		
			3	2	1

AT SI penultima & antepenultima & quæuis alia diuiſoris nota toties non reperiatur in diuidendi figuris ſupra ſe locatis, & reliquo earundem, ſi quod erit, quoties vltima diuiſoris in vltima diuidendi continetur: tunc quia toties illæ à ſupra ſe repoſitis ſubduci non poſſunt, quoties hæc ab vltima diuidendi: ſubducamus vltimā diuiſoris ab vltima diuidēdi ſemel minus, quàm alioqui ſubtrahi poſſet. & conſyderemus an reliquum quod ex vltima diuidēdi figura ſupererit, penultimæ, antepenultimæ & cæteris eiuſdem figuris tantum ſubminiſtret quantum ad ſubductionem reliquarum diuiſoris notarum ferendam ſatis erit. Quòd ſi poſt id factum ſingulæ diuiſoris notæ à diuidendi figuris ſuprà ſe poſitis & à reliquo eiuſdem adhuc ſubduci nequeunt: vltimam diuiſoris bis minus, quàm alioqui ſubduci poſſet ab vltima diuidendi ſubtrahamus: & iterum conſyderemus an reliquum quod ſupererit, tantundem penultimæ & cæteris diuidendi figuris ſuppeditabit, quantum ſubductionem diuiſoris ferre poſſit.

QVÒD ſi neque bis minus ſubducere ſufficiat: tentemus an ter minus ſatis eſſe poſſit. Si ne id quidē procedit: experiamur an quater minus deducendo proficere poſſimus. Atque ita rariorē vltimæ diuiſoris ſubductionem ſubinde tentemus: donec reliquum quod in vltima diuidendi per hoc augebitur, cæteris eiuſdē figuris tantũ ſumminiſtret, quantum ad iuſtam ſubtractionē cæterarũ diuiſoris notarũ ferendam ſufficere poſſit. Ad id autem inueſtigādum, partitionis tabella quā ſuprà deſcripſimus, inſpecta plurimũ rudes iuuabit: vt quoties ipſam rariorem ſubductionem in vltima diuidendi cōſyderant, ſemper interiores ab ea & dexteriores parallelas duces, quadrangularem formā minorem contrahentes, inſpiciant. quarum extremi in marginibus locelli facile indicabunt, quis numerus ſit ſumendus, quídque futurum reliquum.

CVM verò conſyderando deprehenderimus quoties vltimæ diuiſoris ſubductio fieri debeat, vt cæteræ eiuſdem notæ à ſuprà poſitis ſimiliter ſubtrahi poſſint: numerũ id indicantem inter parallelas ſupra vltimā diuiſoris notam apponamus. & per illũ numerum quālibet diuiſoris notam multiplicemus: prouenientémque

ex ſingulis multiplicationibus numerum ſub ipſis multiplicatis diuiſoris figuris ſic ponamus, vt ſi notis pluribus ſcribendus erit, primam earum ſemper ſub multiplicata figura, reliquas poſt eam ſuo ordine collocemus: eáſque à figuris diuidendi ſupra ſe locatis, & à reliquo, quando occurret, ſubtrahamus: delentes ſemper prius ipſas diuidendi figuras à quibus fit deductio. & quod ex ſingulis ſubtractionibus reliquum ſupererit, ſupra ipſas diuidendi figuras in quibus repertum eſt, prius deletas ſcribamus eo modo quo antè diximus de vnica præcipientes nota. Quandocunque autem in quouis reliquo aliqua nota retro manet nondum per ſubtractionem exhauſta, præcedénſque eam diuidendi figura, ex qua poſt ſubductionem nihil reliquum manſit, integre deletur: ſuprà ponatur circulus, vt retro adhuc reſtantis reliqui nos admoneat, ſimúlque eius augeat ſignificationem.

QVOD cum peractum erit, ſingulæ diuiſoris notæ deletis prioribus, per vnum locum promoueantur in dextram: & vltima diuiſoris ſub penultima diuidendi, eiúſque penultima ſub diuidendi antepenultima, & ſic deinceps, locetur. Iterúmque de diuiſoris notis ſubducendis eodem modo conſyderandum eſt: eodem modo faciendum, quemadmodum iam dictum eſt. Rurſúſqu: ſubductione peracta, per vnum locum promouendus eſt diuiſor, àtque eadem obſeruanda ſunt, donec prima diuiſoris nota ſub primam diuidendi venerit. vbi finietur opus.

ITAQVE ſi poſt ſubductionem quicquam remanſerit quod minus ſit quàm diuiſor: quia partitio finita eſt: ſupra diuiſorem ſtantem linea interpoſita notetur, vt inde nobis appareat quota pars diuiſoris ſub linea ſubiecti ſit ipſum reliquum ſuprà poſitũ.

SI VERÒ reliquum ipſum maius ſit quàm diuiſor: quoniam errorem inter partiẽdum certum eſt interueniſſe: opus totum denuo repetendum eſt.

PRAETEREA quotieſcunque poſt vnam omnium diuiſoris notarum ſubductionem vſque ad finem operis diuiſor ipſe diuidendi notis ſupra ſe locatis maior reperitur, vt ab his nõ poſſit totus ſubduci: toties circulus inter parallelas eſt reponendus. & ſingulæ diuiſoris notæ nulla facta ſubductione per vnum locũ tranſferendæ ſunt in dextrã. Relictæ autem illæ diuidẽdi figuræ in proxima ſequẽti diuiſoris ſubductione debent exhauriri. Atque ideo ſi poſt conſummatã ſubtractionem in numero diuidendo circulus ad dextram ſupereſt: is inter parallelas à dextra collocetur.

ILLVD quoque etiam in hac partitione quæ per plures fit diuiſoris notas perpetuo ſeruandum eſt, vt ſi aliqua diuiſoris nota ſæpius quàm nouies in diuidendi figuris ſupra ſe reperiatur, nouem tantum inter lineas ſint reponenda. quemadmodum in diuiſione per vnicam diuiſoris notam facienda ſuprà dictum eſt.

ET QVONIAM auſpicantibus præcepta ſine exemplis obſcura videri ſolent, exemplis illuſtremus ea quæ iam dicta ſunt.

```
              1
          5 9 1 2
47 |  2 9 1 5 4 1 0
        6 2 0 3 0
        4 7 7 7 7
          4 4 4
```

DIVIDAMVS bis millena millia nongenta quindecim millia, quadringenta decem, per quadraginta ſeptem. Scripto ſtatim numero diuidendo ſupra parallelas, ſub parallelis diuiſorem ſtatuamus. & quia ſub vltima diuidendi nota binaria, vltima diuiſoris nota quaternaria poni non poterit, quòd hæc illa ſit maior: ſub penultima diuidẽdi quæ nouem cõtinet, quatuor reponamus, & à dextra ſeptem. Deinde partiturus eiuſmodi quæ ſequuntur, ſecum tacitus muſſitet, Quatuor in figuris diuidendi ſuprà poſitis quæ viginti nouem denotant, ſepties reperio. ſepties enim quatuor, viginti octo creant, & adhuc vnum ſupereſt. verùm ſi ſepties ſumpſero quatuor, & vnum reliquum fecero, alteram diuiſoris notam ſeptenariam per ſeptem multiplicatam in figura diuidendi ſupra ſe poſita, & reliquo quæ vndecim continent, toties non reperiam. ſumo igitur ſexies quatuor ex viginti nouẽ, & quinque facio reliqua: vt vtraque diuiſoris nota toties in ſupra ſe locatis reperiatur: repon̊oque ſex inter lineas. & per ea multiplico quatuor, ſic fiunt viginti quatuor. igitur ſub multiplicata figura quaternaria prius deleta repono quatuor, & binarij notã quæ viginti ſignificat, poſt eam ſub vltima diuidendi colloco. Deinde quatuor à nouem ſuprà poſitis demo: quinque autem reliqua ſupra nouem noto: duóque etiam à duobus ſubduco, & vtraſque notas tranſfigo. Iterum multiplico ſex inter lineas poſita, per ſeptẽ alteram diuidendi notam: & procreo quadraginta duo, quorũ duo ſub multiplicata figura ſeptenaria repono: quaternariſque figurã quæ quadraginta ſignificat, poſt eã à ſiniſtra, prius ſeptẽ deletis, ſtatuo. Deinde quia

duo ab vno demere nō poſſum, aſſumo decē mutuo: & duo ab vndecim tollo, ſuperſunt nouē reliqua: quæ ſupra verticem ſigno. & quoniam decem mutuo ſumpſi, ſequentem notam quaternariam vno augeo. ſic quinque illa iam facta à quinque ſuprà ſe repoſitis ſubtraho, deleóque vtraſque notas. Atque ita poſt primam ſubductionem totius diuiſoris per numerū partitionis multiplicati, vtranque diuiſoris ipſius notā per vnum locū in dextram promoueo. Ibi diuiſoris notam quaternariā in nouem reliquis bis reperio, & tamen vnū ſupererit: quod cum quinaria diuidendi figura ſupra ſeptē locata ſatis erit ad ſeptem bis ſubtrahenda. duo igitur inter lineas depono. per ea multiplico quatuor, poſteriorem diuiſoris notā: & fiunt octo. ea ſubducuntur à nouē. vnum ſupereſt: quod ſupra nonariam diuidendi figuram prius deletam notatur, deleta ſimul etiam nota diuiſoris quaternaria. Rurſus ſeptē multiplico per duo: fiunt quatuordecim. horū notam quaternariā ſub multiplicata figura ſeptenaria, vnitatis autē notam, quæ decē indicat, poſt eam ſub vno reliquo ſtatuo. deinde quatuor à quinque, & vnū ab vno reliquo ſupra ſe repoſito aufero: atque vtriſque notis deletis, vnū ex quinque relictum ſupra verticem noto. Rurſúſque poſt totius diuiſoris multiplicati ſubductionē vtranque eius notam per vnū locū in dextrā promoueo. vbi ſupra quatuor, vnitatis notam in diuidendo numero relictam: ſupra ſeptem, quatuor reperio. & quia quadraginta ſeptem in quatuordecim haberi nequeunt, nec vlla poteſt fieri ſubductio: circulo inter lineas inſerto, per vnum locum rurſus diuiſorem ad dextram trāſfero. ibi ſuprà quaternariam diuiſoris notam in diuidendo numero quatuor, & ex priore reliquo vnum quod decem denotat, comperio. ſic in quatuordecim ter quatuor habentur, & duo erunt reliqua pro altera diuiſoris nota ſubducenda. tria itaque inter lineas depono, & per ea multiplico quatuor: fiunt duodecim. horū notam binariam ſub figura quaternaria multiplicata, vnitatem autem decem denotantem ſub reliquo ſubſigno. ſtatímque ea ſubduco à quatuordecim deletis: & duo ſuperſunt. multiplico deinde ſeptem per tria: vnde creantur viginti vnum. horum vnitatis notam ſub figura ſeptenaria multiplicata, notam autem binarij à ſiniſtra ſub reliquo pono: atque ea ſubtraho à ſuprà poſitis diuidēdi figuris, videlicet ab vnitatis nota & duobus reliquis. ſic nihil omnino ſupereſt. atque ita vtræque diuiſoris & diuidendi notæ delentur. Veruntamen quanquam omnes numeri diuidendi ſignificantes notæ per ſubtractio-

nem ſut exhauſtæ: tamē quia in eo ſupereſt adhuc circulus,& partitio plene peracta nō eſt, propterea quòd nōdum prima diuiſoris nota ſub primā diuidendi ſucceſſerit : circulus ipſe inter lineas ad dextram recondatur. Ita numerus partitionis inter lineas comperietur, Sexaginta duo millia,& triginta.

1 4 1
2 9 2 3
3 | 3 1 6 5 3
3 8 9 | 9 7 4 0 5 6 3
2 5 0 4 0
3 8 9 9 9 9 9
1 6 8 5 8 6
1 8 8 3 8
3 4 3 3
3 3

VNVM explicauimus pro rudibus exemplum: vbi duabus notis ſcriptus erat diuiſor. alterum aggrediamur, in quo tres notas, poſtremámque harū minimam, reliquas anteriores maiores habeat. cuiuſmodi exempla difficilius explicantur, quàm ſi poſtrema diuiſoris nota maior anterioribus eſſet. Diuidamus itaque nouies millena millia, ſeptingenta quadraginta millia, quingenta ſexaginta tria, per trecenta octoginta nouem. Et quum notas diuidendi & diuiſoris ſcripſerimus, duxerimúſque parallelas: ſub his diuiſorem ita ſtatuamus, vt vltima eius nota ſit ſub vltima diuidendi, penultima ſub penultima, antepenultima ſub antepenultima. Deinde conſyderemus quoties ternariam notam vltimam diuiſoris à nonaria diuidendi vltima poſſimus ſubducere : vt pro cæteris diuiſoris notis, quæ maiores ſunt, ſubtrahendis, ſatis ſuperſit. & bis id fieri poſſe deprehendemus. duo igitur inter parallelas ponimus. per quæ tria multiplicamus: fiunt ſex. ea ſubducimus à nouem. tria manent reliqua. ea ſupra poſtremam diuidendi deletam notamus, ſimul deleta etiam diuiſoris poſtrema. Iterum per duo multiplicemus mediam diuiſoris octonariam notam: ſurgunt ſexdecim. ſex ſub octo deletis, reponimus, vnitatíſque notam poſt octo ſub poſtrema diuiſoris. deinde & ſex à ſeptem demimus, & vnum reliquum ſuprà ſcribimus. vnitatis autem notam à tribus, quæ ex priore reliquo ſuperſunt, extrahimus, & duo relicta ſignamus ſupra verticem. delentúrque figuræ, tam quæ ſubductæ ſunt, quàm à quibus fit ſubductio. Rurſus tertiam diuiſoris notam no-

nariam per duo multiplicemus, & fiunt decem & octo. quorum octo ſub nonaria deleta reponimus: vnitatis notam pro decē proximo ſequenti loco. Et quia octo à quatuor ſuprà poſitis ſubducere nō poſſumus, decem mutuo ſumptis, octo à quatuordecim ſubducimus. ita deletis notis, ſex relicta ſignantur ſupra verticem. pro illis autem decem aſſumptis vnum addimus ad ſequentem vnitatis notā quæ eſt ſub diuiſore: & duo illa, quia ab vno ſupra ſe repoſito auferre non licet, decem mutuantes ab vndecim tollimus. rurſúſque deletis notis, nouem relicta ſignamus ſupra verticem. Et quoniam decem iterum ſumpſimus: iterum ſequenti loco vnū à duobus ſuprà ſignatis demimus: vnúmque quod ſupereſt notamus, deleta nota binaria. Et quoniam ſemel omnes diuiſoris notas à ſuprà poſitis multiplicatas abſtulimus: eas per vnum locum ſingulas in dextram promouemus. Ibi iterum conſyderamus, quoties tria à decem & nouem ſuprà poſitis extrahi poſſunt. vt tamen ſatis ad cæterarum diuiſoris notarū ſubductionem ſuperſit: id quin quies fieri poſſe cōperimus. quinque igitur inter lineas ſuprà tria reconduntur. per ea, tria multiplicantur, & fiunt quindecim. quorum quinque ſub multiplicata figura ternaria reponuntur: & vnitatis nota pro decem loco ſequenti. deinde quinque ſubducuntur à nouem ſupra ſe poſitis: & quatuor reliqua ſuprà ſcribuntur. vnitatis autem nota ab vno reliquo tollitur: delentúrque figuræ. Multiplicatur deinde ſecūda octonaria diuiſoris nota per quinque. inde ſurgunt quadraginta. circulus itaque ſub octo locatur. & quaternaria nota quæ quadraginta ſignificat, poſt eum. ea ſubtrahitur à quatuor ſuprà poſitis: & vtraque nota trāſfigitur obeliſco. poſtea multiplicatur tertia nonaria diuiſoris nota per quinque: & creſcunt quadraginta quinque. quorum quinque ſub nouē collocantur: & loco ſequēti quatuor pro quadraginta. ſic quinque, quia circulus ſupra ſe notatur, à decē mutuo ſumptis auferūtur, & quinque manent: quæ ſupra circulum deletum annotantur. Et quoniā decem ſunt aſſumpta, vnū ad ſequentem quaternariā notam additur, atque ita quinque à ſex ſupra ſe locatis deducūtur. deletíſque figuris, vnū quod relictū eſt ſignatur ſupra verticē. Sic omnes diuiſoris notæ per quinq; multiplicatæ, & à ſuprà poſitis ſubductæ, per vnū locū ſingulæ tranſferūtur in dextrā. Et quia diuiſoris notæ in diuidendi figuris ſuprà ſe poſitis haberi nequeunt, circulus inter lineas inſeritur. rurſus per vnū locū ſingulæ diuiſoris notæ in dextrā procedūt. Ibi cōſyderamus quoties diuiſoris vltima ter-

naria à diuidendi notis ſuprà ſe locatis,quæ deſignant quindecim, tolli queat. & quanuis quinquies id fieri poſſit,ſemel tamē minus ſubducimus:vt ſequentium diuiſoris notarū habeatur ratio, quatuórque inter parallelas locamus. per ea multiplicamus tria, & fiunt duodecim. quorum nota binaria ſub tribus multiplicatis locatur:& vnitatis nota pro decem in ſede ſequenti. Deinde duo ſubducuntur à quinque , & tria reliqua manent. ea ſuprà ſcribuntur. vnitatis autem nota tollitur ab vno ſupra verticem poſito:ſtatímque delētur notæ,tā quæ ſubductæ ſunt,quàm à quibus fit ſubductio. Multiplicatur deinde octonaria diuiſoris nota per quatuor, & oriūtur triginta duo. horū duo ſub octo recōdūtur:ternaria nota loco ſequenti. Deinde duo illa demuntur à quinque: tria verò, quæ ex his ſuperſunt,in vertice notantur. ternaria autem diuiſoris nota à tribus quæ ſuprà notantur,aufertur: delentúrque vtræque notæ. Poſtea tertia diuiſoris nota nonaria per quatuor multiplicatur:inde ſurgunt triginta ſex. horū ſex ſub nouē multiplicatis,ternaria nota loco ſequenti ſubnotatur. ea à ſupra ſe repoſitis auferūtur:nempe ſex à ſex,& ternaria nota à tribus. Deinde per vnum locum in dextram ſingulæ diuiſoris notæ rurſus procedunt. Et quia prima diuiſoris nota ſub primā diuidendi ſucceſſit,nihílque in diuidendo numero præter tria ſupereſt vnde fiat ſubductio : atque eapropter diuiſor in diuidēdo non reperitur: circulus inter lineas ad dextram reponitur . tria autē illa quæ partitione finita ſuperſunt,ſupra diuiſorē ſtantem,linea interpoſita notantur. Ita partitionis numerus inter lineas ſurgit, Viginti quinque millia & quadraginta,atque in reliquo tres trecētesimæ octogeſimæ nonæ partes. Hactenus exempla expoſuiſſe ſufficiat, in quibus diuiſor plures habet notas. per hæc enim intellecta facile ſeſe quiuis explicare poteſt, etiā ſi diuiſor quatuor,aut quinque,pluréſve habeat notas. cuiuſmodi exemplū mēte cōſyderandū ſub oculis ſubiecimus.

							1	0	9		1	1			
						1	0	6	8	5	5	2	3	9	
1	3	9	7	|	1	3	6	9	7	0	3	3	4	5	7
1	5	7	9	|	7	6	8	5	9	4	6	3	8	2	0
					4	8	6	7	6	0 .	3	7			
					1	5	7	9	9	9	9	9	9	9	9
						1	5	7	7	7	7	7	7	7	
							1	5	5	5	5	5	5		
								1	1	1	1	1			

IN OMNI autem ſectione quotieſcunque inter partiendũ poſt ſubductionem factã diuiſor in dextrã promouẽdus eſt: ſi reliquũ, quod in diuidendi notis ſupra diuiſoris verticẽ ſignatis, ex ea ſubductione ſupereſt, maius reperitur quàm totus diuiſor: error omnino admiſſus eſt. & fruſtra vlterius in ea partitione progrediendum eſſet, niſi quis operam perdere mallet. Quamobrem iterũ à capite repetendũ eſt opus. Nam non ſolum poſt peractã totã partitionẽ, reliquũ quod ſupereſt, toto diuiſore minus erit ſi recte proceſſit opus: verũ etiam in medio opere, quandocunque in dextram promouẽdus eſt diuiſor, idẽ euenire debet. Quæ res, ſi bene animaduerſa fuerit, non mediocre compendium, cum in omni partitione, tum præcipue in immenſis ſummis diuidendis afferet.

ILLVD obſeruare eſt operæprecium. Maior numerus minorem non diuidit, quippe quum in minore maior nõ contineatur: id quod huius capitis initio admonuimus. Cæterum ratio iniri poteſt qua maior numerus etiã minorẽ diuidere recte poſſit. id quod fiet, ſi de rebus à minore numero numeratis, prius vna in ſpecies ſub ſe cõtentas ducatur: vt earũ productus numerus diuiſore maior factus, eius ſectionẽ ferat. Veluti ſi inter ſeptẽ viros tres aureos partiri volumus, Quandoquidẽ in numero ternario numerus ſeptenarius nõ habetur, ſoluamus aureũ vnum in centum nummos ſeſtertios, quibus æſtimatur: centenariúmque numerũ per ternarium multiplicemus. & enaſcentur trecẽta. quæ deinde ſi in ſeptẽ partiamur: numerus ſectionis prodibit, quadraginta duo, & ſex ſeptimæ. Itaque ſi inter ſeptem viros tres aureos, centum nummis ſingulos æſtimatos, diſtribuamus: vnuſquiſque conſequetur quadraginta duos nummos, & præterea vnius nummi ſex ſeptimas.

AD HAEC maior numerus minorem frangere in minutias poteſt. id quod ſequenti libro de minutiarum partitione præcipientes, monſtrabimus.

QVISQVIS experiri cupit an numeros recte diuiſerit: numerum partitionis per diuiſorem multiplicet. & ſi ex ea multiplicatione atque ex reliquo, ſiquod ſupereſt, numerus diuidẽdus exibit: nihil errauit ſectio. Cæterũ ſi alius ex ea multiplicatione numerus, quàm diuidendus redibit: propter admiſſum in calculo errorem partitio tota denuo repetenda eſt. ídque ita eſſe rerum natura monſtrat. Nam quemadmodum ſi partes quæ ab aliquo toto demptæ ſunt iterũ componantur, idem totũ redeat neceſſe eſt: ita ſi ex partium earundem inſtaurata compoſitione aliud totum

prodeat quàm antè fuerit:vel partes alienas per errorem eſſe ſump tas,vel eaſdem male iterũ coniunctas eſſe oportet. Cum itaque ex numero diuiſo per crebram diuiſoris ſubductionẽ exhauſto, peracta diuiſione nihil aliud ſuperſit quàm partitionis numerus, & reliquum ſi quod fuerit: ſi numerus ipſe diuiſor ad numerum par titionis reſtantem toties iterum addatur quoties antè ſubductus eſt(id quod facile fit,ſi numerum partitionis per diuiſorem multi plicemus,adiungamúſque reliquum, ſi quod remanebit) numerũ antè diſſectum denuo inſtaurari neceſſe eſt, quia & omne totũ cũ ſuis partibus conſentit,& pars quæ diſſentit,aliena eſt à toto.

DIMIDIATIO numerorum nihil aliud eſt, quàm eorum per duo ſectio:quæ certe & prima, & longe omnium facillima eſt ſpe cies partitionis. Et quanuis non magni referat nulla de ea præcep ta ſeparatim dare, cum ea quæ iam dicta ſunt,abunde ſufficiant: quia tamen minore tum linearum apparatu, tum conſyderatione ſpecies hæc partitionis eget quàm cæteræ:quæ,cum ſint innumerabiles,tum omnes hac difficiliores:operæpretium eſſe putauimus facilitatis eius compendium auſpicantibus enarrare. Neque enim duabus parallelis eſt opus:vnica tantum linea ſub diuidẽdo numero ducatur. Deinde numerum quenuis per medium ſecturus quiſpiam à ſiniſtra incipiens per omnes notas in dextram ten dat. & ſi vltimus diuidendi numeri character nota ſit vnitatis,à pe nultimo ſectionẽ ordiatur:ſingulorúmque locorũ paribus numeris per mediũ ſectis,ipſum dimidiũ ſub linea locis ſingulis ſubijciat. Sin impar occurrit numerus,vnitate dẽpta,reliquum numerũ per medium ſecet: dimidiúmque ſub linea reponat. vnitas autem ipſa pro decẽ computata,memoriáque recondita ad ſequentem ſectionẽ ſeruetur:vt vel denariũ numerum creet,ſi circulus ad dextram proximus eſt:vel ex denario & primario compoſitum, ſi alia occurrit nota. iſque numerus, ſi par eſt, per medium ſecetur. ſi impar,vnitate rurſus dempta,atque ad ſequentem ſectionem (vti iam dictum eſt)ſeruata ,relictus numerus per medium diuidatur. Si verò in diuidendo numero priuſquam ad primam notam ventum erit, vnitas occurret:ſi nihil ſupereſt memoria retẽtum quod ei adiũgatur:ſub linea ponatur circulus:vnitáſque ipſa ad ſequentem ſectionem ſeruetur. ſemper autem dimidium ſub linea recondatur. Ita progrediendum eſt in dextram, vſque ad primam notã: quæ ſi circulus fuerit, & proximus ei numerus par repertus eſt: ſub linea ponatur. Sin proximus ei numerus impar cõpertus eſt,

à quo dempta vnitas mente retenta manet: circulus ipſe cum vnitate iunctus decem denotabit:quorum quinque quæ ſunt dimidium,ſub linea reponentur. Sin vnitatis fuerit nota:ſi denarius aliquis ex memoria ei adiungitur:vnitate dempta,decem ſunt ſecanda, & quinque ſub linea recondenda.ipſa autem vnitatis nota pro totius ſectionis reliquo,ſupra diuiſorem ſtantem linea interpoſita,notetur : ſic ſcripta,vnius integri partem denotabit ſecundam, quæ dimidium capit.Itidem in reliqui locum transferetur vnitas, etiam ſi nullus denarius numerus memoria retentus ſupereſt qui cum ea iungatur.Numerus autem partitionis ſub linea diuidendo numero ſubiecta ſurgens apparebit.

Hæc quanuis propter facilitatem exẽplo nihil egeant, vnum tamen pro rudibus adiungendum eſſe duximus.

1		.				.		
2		1	1	4	1	0	3	1
		5	7	0	5	1	5	

INVESTIGEMVS itaque dimidium in millenis millibus, centum quadraginta & vnis millibus,atque triginta vno. Scripto ſuis notis numero, ductâque ſub eo linea,quia vnitas in initio à ſiniſtra occurrit,incipimus à penultima,vbi etiam altera vnitas eſt. Itaque quoniam ibi vndecim habentur,vnitate pro denario ad ſequentem ſectionem ſeruata, decem relicta per medium ſecamus, & quinque ſub linea reponimus. Progredimur deinde ad proximum locum:vbi quatuor reperimus,quibus denarium ex memoria depromimus,vt fiant quatuordecim. horum dimidium, ſeptẽ, ſub linea locamus. Rurſúſque progredimur. ibi occurrit vnitas quæ ſecari non poteſt: ideo ſub linea circulus ponatur, & vnitas ſeruetur in ſequentem locum. In quo quia circulus occurrit, cui vnitas adiuncta decem faciunt,quinque ſub linea ſtatuemus. Denuo progredimur.ibi tria occurrunt:quorum vno quia numerus eſt impar,dempto,duo ſecamus:& horum alterum ſub linea condimus, denario numero mente in ſequentem ſectionem retento. Rurſus ad dextram progredimur ad primam vnitatis notam : cui decem ex memoria adiuncta creant vndecim.vnitate itaque dempta,decem per medium ſecamus, & horum quinque ſub linea reponimus.vnitatem autem illam ſupra diuiſorem ſtantem linea interpoſita ſignamus, vt vnius integri partem ſecundam ſignificet. Ita partitionis numerus ſub linea manebit,Quingenta ſeptuaginta millia,quingenta quindecim.

DE PROGRESSIONE.

PROGRESSIO arithmetica eſt numerorum inter ſe æqualiter diſtantium in vnam ſummam collectio,& veluti compendium quoddam eos numeros numerandi qui paribus interuallis diſtant. Eius autem duæ ſunt ſpecies: Altera eſt, in qua naturali numerorum ſerie ſeruata,numerus quilibet ſequẽs ſola vnitate præcedentem ſuperat,ſicuti in hoc exemplo,1.2.3.4.5 6.7.8.9.Altera in qua numeros quoſlibet omittentes, & paria ſeruantes interualla,longam numerorum ſeriem connectimus.veluti,1.3.5.7.9.11.13. In vtraque autem ſpecie idem eſt per compendium numeros colligendi modus.is autem hac bimembri conſtat regula. Si numerorum inter ſe æqualiter diſtantium, atque ordine continuo diſpoſitorum ſeries par occurret: eorum primus numerus iungatur cum poſtremo:numerúſque ex eis aggregatus per dimidium numeri loca ſeriei numerantis multiplicetur. Ita fiet,vt numerus ex hoc productus ſummam omnium commonſtret.veluti in hoc exemplo,1.2.3.4.5.6.7.8.primus numerus 1,ad poſtremũ 8 addatur,& fient 9.Cúmque in tota ſerie ſint octo loca,ducamus 9 in 4 eorum dimidium, & prodibunt 36,quæ omniũ eſt ſumma. Similiter ſi exempli cauſa proponantur,1.3.5.7.9.11.primus numerus ad poſtremũ addatur, & fient 12.& cum in tota ſerie ſint ſex loca,ducamus 12 in eorum dimidium,nempe 3.ſic ſurgent 36, quæ ſumma eſt vniuerſorum. Quòd ſi numerorum à ſe æqualiter diſtãtium atque ordine continuo diſpoſitorum ſeries erit impar, tunc numerus indicans quot loca ſunt in ſerie, non in eum numerum ducatur qui indicat quotus locus eſt in ſerie medius, ſed in eum numerũ qui in ſerie medius reperitur, atque ab vtroque extremo æqualiter diſtat. Ita numerus procreatus omnium ſummã patefaciet.ſicuti in hoc exẽplo,1.2.3.4.5.6.7.quia loca ſeriei ſunt ſeptem, & medius numerus eſt 4:7.in 4 ducamus,& fient 28. quæ ſumma eſt vniuerſorũ.Itidem ſi exempli cauſa ſumantur,1.4.7.10.13. quia loca ſeriei ſunt quinque: & medius numerus eſt 7:5 in 7 ducamus & fient 35.quæ ſumma eſt omnium.

Alia regula datur magis generalis: & tamen non minus certa quàm eſt illa prior.ea autem eſt huiuſmodi, In omni progreſſione Arithmetica, ſiue ſeries par ſiue impar fuerit, numerus ab extremorum additione collectus in numerum indicantem quot loca ſunt in ſerie,multiplicetur. numerúſque productus poſtea di-

midietur, & ſumma progreſſionis habebitur. Exẽplum in ſerie pari, 1.3.5.7.9.11. primus numerus additus ad poſtremum facit 12. & quia ſex loca ſeriei ſunt: 12 per 6 multiplicemus, & ſurgẽt 72. quæ ſi dimidientur, fient 36: quæ ſumma eſt progreſſionis. Exemplum in ſerie impari, 1.4.7.10. 13. extremi numeri ſimul additi faciũt 14. & quia in ſerie ſunt quinque loca: 5 in 14 ducta, creãt 70. quæ ſi dimidientur, prodeũt 35. quæ ſumma reperietur vniuerſæ progreſſionis.

SI VIS experiri an recte ſummam collegeris, ab vniuerſa ſumma per compendium inueſtigata ſingulos in ſerie numeros ſubtrahe. & ſi nihil erit reliquum, recte collegiſti. Quòd ſi quid reliqui manſit, error interuenit.

Alia ſpecies progreſſionis habetur quam Geometricam vocant, in qua numerorum longo ordine diſpoſitorũ interualla ſunt inæqualia, quando inter numeros ſerie quadam connexos proportio aliqua reperitur, veluti dupla, tripla, quadrupla, aut ea maior. de qua in proportionum libro poſtea dicturi ſumus.

DE QVADRATI ET CVBI LATERIBVS INVESTIGANDIS.

DE QVADRATI & cubi lateribus exquirendis dicturos præfari primum pauca quædam nos oportet quis numerus ſit quadratus, quis cubus: quo magis de rebus notis præcepta daturi, cuncta intellectu faciliora reddamus. Numerus itaque quadratus eſt, qui ex vnico numeri cuiuſuis in ſe ductu cõſtituitur. cuiuſmodi numerus eſt quaternarius, qui ex vnico binarij numeri in ſe ductu procreatur. bina nanque ſemel in ſe ducta producũt quatuor. Similiter nouenarius numerus quadratus eſt. nam terna ſemel in ſe ducta educunt nouem. Itidem 16 quadratus eſt numerus. quippe quaterna in ſe ſemel ducta progenerãt ſexdecim. Ad eundem modum reliqui numeri omnes in ſe ſemel ducti, quadrati ideo dicũtur, quòd ſi diuiſim per vnitates ſcribantur, formam quadratam referant.

I	I	I	I
I	I	I	I
I	I	I	I
I	I	I	I

VNDE quemadmodum in corpore continuo quadrati latus appellatur, ſic in numeris latus quadrati numerus ille vocatur qui vnum è lateribus numeri quadrati perficit. quod Arithmetici quadrati radicem non inepte appellant: quod ex eius in ſe ductu numerus quadratus, velut ex radice quapiam arbor, ſurgat.

CVBVS numerus eſt qui ex numeri cuiuſuis ſemel in ſe atque iterum in numerum productum multiplicatione componitur: cu-

iuſmodi numerus eſt octonarius. nã bina in ſe ſemel ducta creant 4. iterum bina in 4 ducta, creãt 8. Similiter 27 numerus eſt cubus. terna enim in ſe ducta creant 9. iterúmque terna in nouem ducta faciunt 27. Itidem 64 numerus eſt cubus. quippe quaterna in ſe ſemel ducta educunt 16: iterúmque quaterna in 16 ducta procreãt 64. Atque ad eundem modum reliqui numeri omnes ſemel in ſe, atque iterum in numerum productum multiplicati, cubi ideo dicuntur, quòd ſi in corporum ſolidorum formam redigantur, ad exemplum cubi, tres dimenſiones æquales, nempe longitudinem, latitudinem, & craſſitudinem habere reperientur. Eſt autem cubus corpus ſolidum ſex continens planicies quadratas, atque harũ latera duodecim, quorũ quatuor inferna ſunt, quatuor ſuperna, quatuor ab infernis ad ſuperna pertẽdunt: angulóſque habet octo, videlicet quatuor infernos, quatuor ſupernos, in quorum ſingulis terna latera coeunt. Latini teſſeram vocant. quanquam in numeris vocabulo ipſo græco latinitate iam donato magis vtuntur, vt cubum vocent. Cubi verò latus numerus ille dicitur, qui vnum ẽ cubi lateribus efficit: & quadrati in eo contenti lateri æquale eſt. quod cubi radicẽ ſatis appoſite nuncupant, quemadmodum de quadrati latere iam admonuimus. Quocirca manifeſtum eſt, in omni numero cubo numerũ quadratum haberi: cæterũ non econuerſo reperies in omni quadrato cubum. Vnitatem autẽ Arithmetici & numerum quadratum, & cubum eſſe volunt.

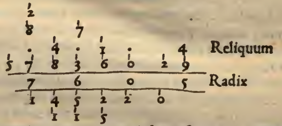
IN huiuſmodi laterum exquiſitione magnum enaſcetur ſtudioſis compendium ad Arithmeticam pernoſcendam. per hanc enim Ptolemæus aſtrorum longe peritiſſimus, corporum ſupracæleſtiũ & ſphærarum magnitudines adinuenit, velocitatémque motuum in his deprehendit. Adhæc eius cognitio non modo Aſtrologiæ diſcendæ, verumetiam Geometriæ tãtopere conducit, vt ſine hac, quæ in his pulcherrima ſunt, intelligi nequeant.

VERVNTAMEN rerum ordo poſcit vt de quadrati latere inueſtigando prius dicere aggrediamur. Et cum quadrati lateris exquiſitio nihil aliud ſit, quàm numeri alicuius inuentio, qui in ſe ductus vel totum numerum propoſitum, ſi quadratus fuerit, producit: vel maximũ quadratũ in eo contentum, ſi ipſe non ſit quadratus: numerum ipſum latus facientem ſic inueſtigabis.

PRINCIPIO numerus quiuis, in quo quadrati radicem inueſtigare cupis, punctis ſupra verticem ſignetur in locis imparibus: videlicet primo, tertio, quinto, ſeptimo, nono, & reliquis iti-

dē. Et quia quadrati lateris inueſtigatio nihil aliud eſt quàm quædā diuiſionis ſpecies: ſub numero pūctis notato duæ lineæ parallelæ ducendæ ſunt. inter quas latus ipſum exquirendum ponatur quemadmodum in diuiſione præcepimus. quia quot adſcripta pūcta deprehendes, tot in numero ſectionis numeros primarios habebis numeri propoſiti radicem oſtendentes. Deinde ſub extrema ad ſiniſtram nota, puncto loco impari ſignata, numerus aliquis primarius exquiratur, qui ſemel in ſe ductus totum reſpectu ſui loci numerum ſupra ſe repoſitum ſubductus aboleat: vel ſaltem quàm proxime fieri poteſt, ſi totum delere nequit. Huiuſmodi autem numerus primarius inuentus inter parallelas inſerendus eſt, atque in ſe multiplicandus. & poſtquam numeri procreati facta erit ſubductio, reliquum ſi quod erit, ſupra notas à quibus fit ſubtractio, deletas è veſtigio, ne rationem conturbent, reponatur. Deinde numerus ipſe primarius duplicandus eſt, & duplum ſub proxima figura dexteriori ponendum. Quòd ſi ex duplicatione numerus duabus notis ſcribēdus prodeat: earum prima dextram verſus ſub proxima figura, quæ inter pūcto ſignatas media eſt, reponi debet: Altera ſuo ordine ſequens ipſam ſub ea nota reponatur, ſub qua primarius numerus inuētus eſt. Iterum deinde alius numerus primarius exquirendus eſt, qui in duplum ductus totum numerum, qui ſupra duplum poſitus eſt, ita ſubtractus exhauriat, vt poſtea etiam in ſeipſum ductus totum numerum à dextra proximo pūcto ſignatum cum reliquo, ſi quod erit, abſorbeat. Sin totum auferre nequit, ab eo tollat quàm plurimum poteſt. Quod cum peractum erit, totus inter parallelas numerus duplicandus eſt, duplúmque ſub proxima figura dextram verſus ita ponendum, vt primi dupli nota ſub ea figura, quæ proxime inter puncto ſignatas media eſt, velut ad perpendiculum reponatur, aliæque poſt ipſam, ſuóque quæque ordine, tendentes in ſiniſtram. Rurſus deinde exquirendus eſt numerus aliquis primarius, qui in duplum ductus totū numerum qui ſupra duplum ſitus eſt, ſic ſubductus auferat, vt poſtea etiā in ſeipſum ductus numerū à dextra proximo puncto notatum vel totum deleat cum reliquo, ſi quod erit, vel quàm prope id fieri poteſt. Atque ad hunc modum progrediendum eſt ad primam vſque notam. Quotieſcunque autem poſt numeri primarij duplicati multiplicationem & ſubductionem, numerum ipſum primarium ducimus in ſeipſum: ſemper id ſub aliquo puncto fieri debet, ſtatímque è veſtigio quicquid inter parallelas in nume-

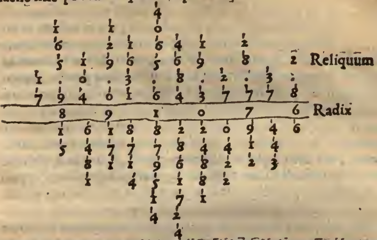
ro ſectionis reperitur duplicãdum eſt,& primi dupli nota ſub proxima inter puncta figura ad dextrã reponenda eſt,cæteráque poſt eam, ſuo ordine in ſiniſtram progredientes, quemadmodum iam diximus. Illud quoque diligenter obſeruandum eſt, Quandocunque in quauis inueſtigationis parte numerus aliquis primarius inueniri nequit,primũ in duplum,deinde in ſe ducendus:quin productus maior erit numero ſupra ſe locato, vt ab illo ſubduci non poſſit: tunc circulus ad numerum inter parallelas aſcribendus eſt, omnibúſque notis numeri cuius radicẽ quærimus, intactis dimiſſis,deletis tamen ſub parallelis dupli notis, progreſſus in dextram fiet, ſi nondum peractum eſt opus.totúſque inter parallelas numerus ita duplicetur, vt prima dupli nota circularis ſub proxima ad dextrã figura,quæ inter puncto ſignatas media eſt,reponatur: cæteráque poſt eam ſuo ordine in ſiniſtram tendentes, vt antè dictũ eſt. Peracta demum radicis inueſtigatione, ſi nihil reliquum erit, palàm eſt numerum propoſitũ cuius latus ſcrutati ſumus,quadratum eſſe. Quòd ſiquid reliquũ manſit,non erit quadratus,ſed numerus inter parallelas radix eſſe comperietur maximi numeri quadrati in eo contenti. Et quoniam obſcura ſine exemplis non facile intelligi queunt, exempla nunc adiungamus quæ cuncta magis illuſtrent.



Ex quinquagies ſepties millenis millibus,octingentis trigintaſex millibus,& viginti nouem,radicẽ eruamus. Poſtquam numeris ſuo ordine perſcriptis ductæ erunt parallelæ, locáque impar ia punctis annotata:ſub poſtremo ad ſiniſtram numero puncto notato numerum aliquem primariũ quæramus, qui in ſe ductus vel totum numerum ſupra ſe notatum, qui eſt 57, vel quàm proxime fieri poteſt,ſubductus deleat.is autem erit ſeptenarius.nam 7 in ſe ducta,49 creant.quæ ſi ſubducantur à 57,ſuperſunt 8.itaque 7 inter parallelas inſerenda ſunt. ac poſt multiplicationem & ſubductionem factam deletis notis, 8 ſupra poſtremum punctum manebunt reliqua:quæ ſupra verticem notentur. Deinde 7 inter pa-

rallelas poſita duplicemus,& fient 14. quorum 4 ſub proxima ad dextram nota octonaria reponantur, & vnitas denarium numerū deſignans à ſiniſtra ſub numero octonario ex priori ſubductione relicto. Tum iterum inueniendus eſt numerus aliquis primarius, qui in quatuordecim quæ dupla ſunt ductus, numerum ſupra illa poſitum ſic auferat, vt poſtea in ſe ductus proximum à dextra numerum puncto notatum cum reliquo, ſiquod erit, ſubductus tollat, vel ſaltem quàm prope accedi poteſt. is autem erit ſenarius inter parallelas ſub proximo puncto inſerendus: per quem multiplicata 14, faciūt 84. quæ ab 88 ſupra ſe poſitis ſubducta relinquūt 4. Deinde ſex in ſe ducta creant 36. quæ à 43 ſupra ſe notatis exempta, reliqua faciunt 7 ſupra verticem numeri ternarij puncto proxime ſignati notāda. Iterū deinde duplicare oportet quicquid inter parallelas inuenitur. quocirca 76 duplicata faciunt 152. quorū prima nota 2, ſub proxima inter puncta figura ſenaria ponēda eſt à dextra: cæteràque poſt eam ſuo ordine à ſiniſtra. Deinde numerus aliquis primarius rurſus eſt quærendus, qui in totum duplum ductus, numerum ſupra ſe poſitum auferat. Sed quoniam is inueniri nequit, quòd numerus duplus 152 maior ſit numero ſupra ſe locato 76, circulus inter parallelas ſub proximo ad dextram puncto, ipſi inter parallelas numero addatur, notáque dupli ſub parallelis deleantur. Cæterum notæ numeri cuius radicem quærimus, maneant intactæ. Progrediamúrque in dextrā: & rurſus duplicemus totum inter parallelas numerum 760. ex ea duplicatione ſurgent 1520, quorum nota circularis ſub proxima ad dextram figura binaria, ponenda eſt inter pūcto ſignatas media: cæteráque poſt eam ſuo quæque ordine. Ac tum numerus aliquis primarius perquiratur: qui in totum duplum ductus numerum ſupra id locatū, ſubductus deleat: poſteáque in ſe ductus proximum à dextra numerum puncto ſignatum cum reliquo, ſiquod erit, auferat, vel ſaltem quàm proxime fieri poteſt. Is autem erit quinarius. 5 igitur inter parallelas reponentur. per eáque ſingulæ numeri dupli notæ ſeorſum multiplicentur: numeríque ex multiplicatione prouenientes ſubducantur à figuris ſupra ſe locatis: quæ ſtatim deleantur. Et demum in ſe ductus numerus ille quinarius ſubtrahatur à nouenario numero puncto notato: & 4 erunt relicta. Vnde ſatis liquet, quoniam toto opere abſoluto adhuc aliquid ſupereſt, numerum primo propoſitum nō fuiſſe quadratum. nam ſi quadratus fuiſſet, nihil manſiſſet reliquū. Hoc exemplo ſtudioſis quadrati lateris

inueſtigandi viam aperuiſſe ſuffecerit. Alterum plurium notarum oculis ſpectandum atque animo conſyderandũ adiungamus, quod facile ſine præeunte quiuis explicabit.



SI QVIS experiri velit an vera radix quadrati numeri ſit inuenta, radicem ipſam in ſe multiplicet, & ſiquid reliqui manſit, numero ex multiplicatione producto addat. quo fiet, vt niſi perperã facta ſit inueſtigatio, numerus primo propoſitus redeat. Quod ſi alius numerus prodit, opus repetendum eſt, vt error corrigatur. Ipſum autem reliquum æquare aliquando poteſt quadrati lateris inuenti duplum: ſuperare nunquã poteſt. vtputa, ſi numerus propoſitus eſſet 8, radix maximi numeri quadrati in eo contenti erit 2. quæ in ſe ducta creant 4. & 4 erunt relicta, quæ duplum radicis continent. Nam ſi 5 reliqua eſſent, iam fieret 9, quæ aliam radicem habent: videlicet 3. Itidem ſi propoſitus numerus eſſet 15, quadrata radix eius eſſet 3: quæ in ſe ducta faciunt 9, & 6 reliqua, quæ duplicatam radicem capiunt. At ſi relicta eſſent 7, prodirent 16, quæ aliam radicem, nempe 4, oſtentant. Similiter ſi numerus propoſitus eſſet 24, radix maximi numeri quadrati in eo contenti erit 4, quæ in ſe multiplicata faciunt 16, & 8 relinquuntur quæ duplum radicis continent. nam ſi reliqua eſſent 9, iam fierent 25, & ſurgeret alia radix, videlicet 5. Atque ad eundem modum deinceps cæteri numeri ſe habẽt. quamobrem ſi in reliquo plus reperias, quàm quadrati lateris inuenti duplum, errorem calculi palàm eſt interueniſſe.

DE RADICVM IN CVBIS INVESTIGATIONE.

IAM ANTE admonuimus, cubum numerum eum eſſe qui ex numeri cuiuſuis ſemel in ſe, atque iterum in numerum productum multiplicatione componitur. cuius latus inueſtigaturi: millenariorũ loca, punctis ſupra verticem adſcriptis, ſignemus. Ductis deinde ſub eo numero parallelis, quemadmodum de quadrato numero fieri præcepimus, ſub extremo ad ſiniſtram millenario numerus aliquis primarius exquiratur, qui ſemel in ſe, atque iterum in numerum productum multiplicatus, totum reſpectu ſui loci numerum ſupra ſe repoſitum ſubductus aboleat, vel ſaltem quàm plurimum poteſt, ſi totum auferre nequit. Huiuſmodi autem numerus primarius inuentus inter parallelas inſeratur, ſemélque in ſe atque iterum in numerum productum multiplicetur. & poſtquam numeri procreati facta erit ſubductio: reliquum ſiquod reſtabit, ſupra notas à quibus fit ſubtractio deletas è veſtigio, ne rationem conturbent, reponatur. Quantum autem quiuis numerus primarius prius in ſe & deinde in numerum procreatum multiplicatus producat, nequis diu hæſitet, quæ ſequuntur, ante oculos poſita declarabunt.

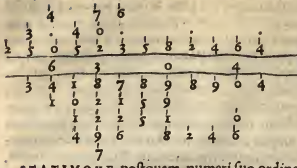
Semel	Vnum	Semel	1
Bis	Bina	Bis	8
Ter	Terna	Ter	27
Quater	Quaterna	Quater	64
Quinquies	Quina	Quinquies	125
Sexies	Sena	Sexies	216
Septies	Septena	Septies	343
Octies	Octona	Octies	512
Nouies	Nouena	Nouies	729
Decies	Dena	Decies	1000

DEINDE numerus ipſe primarius triplicandus eſt, & eius quod triplum erit prima nota ſub proxima figura præter vnam à dextra reponenda eſt, cæteræque poſt eã, ſuo quæque ordine à ſiniſtra. Poſtea exquirẽdus eſt numerus aliquis primarius, qui vnà cũ numero primario prius inuento, nũc pro denario cõputando ductus in totũ triplum, deinde ſolus in numerũ ex multiplicatione procreatum ductus, totum ſui loci reſpectu numerum ſupra ſe repoſitũ cum reliquo, ſiquod erit, ſubductus deleat. poſteáque etiam

ſolus in ſeipſum cubice, hoc eſt, prius in ſe, deinde in productũ multiplicatus, totũ numerũ à dextra proximo pũcto ſignatũ, cum præcedenti reliquo, ſi quod fuerit, exhauriat: aut ſi totũ auferre nequit, tollat ab eo quàm plurimũ poteſt. Quod cũ peractum erit, iterum triplicandum eſt quicquid in numero ſectionis inter parallelas continetur: & eius quod ex huiuſmodi triplicatione natũ erit, prima nota ſub proxima (præter vnam) figura à dextra reponatur: cæteræ autem poſt eam ſuo quæque ordine. Rurſúſque inueſtigandus eſt numerus aliquis primarius, qui vnà cum omnibus numeris primarijs prius inter parallelas inſertis ductus in totum triplũ, poſteáque ſine illis ſolus in numerũ ex multiplicatione natũ ductus, quicquid ſupra triplũ numerũ repoſitum eſt, vel totum abſorbeat, vel ex eo quàm plurimũ poteſt deleat. Deinde itidem cubice ſolus in ſeipſum ductus, totum numerũ à dextra proximo pũcto ſuppoſitum cum reliquo, ſi quod erit (modo fieri poſſit) auferat. alioqui ab eo quàm plurimum poteſt eximat. Poſt hæc denuo triplicandum eſt quicquid inter parallelas reperitur, & numerus alius primarius exquirendus, cæteráque vſque in finem operis ad eundem modum peragenda, quemadmodum iam dictum eſt. Quod ſi nihil reliqui mãſit: numerus, cuius radicem veſtigauimus, cubus erat. At ſi quid eſt relictũ: numerus nõ erat cubus. Cæterũ eruta radix latus eſt maximi numeri cubici in eo numero cõtenti.

VBICVNQVE autem in quauis inueſtigationis parte numerus aliquis primarius inueniri nequit qui vnà cũ alijs numeris primarijs prius inter parallelas inſertis in totum triplum ducatur: poſteáque ſolus in numerum procreatum multiplicetur (quin numerus productus maior erit numero ſupra ſe locato, vt ab illo ſubduci non poſſit) tunc circulus inter parallelas in numerum partitionis inſeratur. omnibúſque notis numeri, cuius radicem quærimus, intactis dimiſſis, deletíſque ſub parallelis tripli notis, ſi nondum finitum eſt opus, progreſſus in dextram vltra proximum numerum puncto ſignatũ fiat. totúſque inter parallelas numerus ita triplicetur, vt primi tripli nota circularis ſub proxima figura præter vnam vltra numerũ proximo puncto ſignatum, à dextra reponatur, cæteráque poſt eã, ſuo quæque ordine tendentes in ſiniſtrã.

EXEMPLA nunc afferamus quæ ſingula manifeſtent: atque ex ducenties quinquagies millies millenis millibus, quingenties vicies ter millenis millibus, quingẽtis octoginta duobus millibus, quadringentis ſexaginta quatuor, radicem cubicam eruamus.



Numerus cubus
Radix cubi

STATIMQVE poſtquam numeri ſuo ordine perſcripti, ductæque ſubtus parallelæ,& millenariorum ſedes punctis erunt ſignatæ:ſub poſtremo ad ſiniſtram millenario pūcto notato numerus aliquis primarius exquiratur,qui ſemel in ſe, & iterum in numerum productum multiplicatus , vel totum numerum reſpectu ſui loci ſupra ſe repoſitū qui eſt 250, ſubductus deleat , vel ſaltem ex eo quàm plurimum poteſt auferat. Is numerus eſt ſenarius.nā ſexies ſena ſexies , 216 accumulant. quæ ſi ſubducas à 250, ſuperſunt 34. itaque 6 inter parallelas inſerenda ſunt . ac poſt multiplicationem & ſubductionem deletis notis, 34 pro reliquo ſic notanda ſunt,vt 4 ſupra poſtremum punctum notentur, & 3 ab eorum ſiniſtra . Deinde 6 inter parallelas poſita triplicemus, & ſurgent 18. quorū 8 ſub proxima nota præter vnā à dextra reponantur,à ſiniſtra 1. Tū inueſtigandus eſt numerus aliquis primarius, qui vnà cum numero primario prius inuento pro denario computando ductus in totū triplū,deinde ſolus in numerū procreatū ductus, totū eius loci reſpectu numerū ſuprà repoſitū ſubtractus ſic tollat,vt poſtea etiā ſolus cubice in ſe ductus vel totū numerū à dextra proximo puncto ſignatum,& reliquū, ſiquod præcedit,exhauriat,vel ſaltē ex eo quàm plurimū poteſt deleat. Is verò erit 3. quoniā nota ternaria locata à dextra ſenarij,quæ antè repoſita eſt, profert 63.quæ ducta in 18,creant 1134.deinde 3 ſola ducta in ipſa 1134,producunt 3402.quæ ſic ſubnotanda ſunt, vt prima nota ſub prima tripli figura reponatur , cæteræ ſuo ordine ſequentes poſt eā.quarū à ſupra ſe poſitis facta ſubductione,ſuperſunt 50. deinde 3 ſola in ſe cubice ducta faciūt 27, quorum 7 ſub numero ternario proximo pūcto ſignato,& 2 ab eorū ſiniſtra ſtatuenda ſunt. Horū tūc ſubtractione à ſupra ſe locatis notis facta,476 ſuperſunt.Deinde 63 quæ ſunt inter parallelas,triplicētur: & ſurgēt 189. quorū 9 ſub octonaria nota, quæ proxima figura præter vnā eſt, reponan-

tur,cæteræ poſt eã ſtatuantur à ſiniſtra. Rurſus inquirẽdus eſt numerus aliquis primarius,qui vnà cũ numeris primarijs antè inuẽtis prius in totũ triplũ,& poſtea ſolus in numerũ productũ multiplicatus, numerũ ſuprà repoſitum vel totũ ſubductus auferat, vel quàm plurimum ex eo poteſt. Id autem hoc loco fieri nequaquam poteſt .·nã etiã ſi minimus numerus primarius,hoc eſt ipſa vnitas aſſumeretur ad 63,vt eſſent 631, eáque in triplũ,videlicet 189 ducerẽtur,& poſtea ſola vnitas in productũ multiplicaretur, ſurgerent 119259,quæ longe tranſcenderẽt numerum ſupra ſe repoſitũ 7658. Ita quoniã ſubductio fieri nullo modo poteſt,circulus inter parallelas ad numerum ſectionis apponatur. Sic omnibus notis numeri cuius radicem quærimus,intactis dimiſſis,deletíſque ſub parallelis tripli notis:facto vltra proximũ punctũ in dextrã progreſſu,quicquid inter parallelas eſt,hoc eſt 630,denuo triplicem⁹,& fiẽt 1890. quorum circulũ quæ prima tripli eſt nota, ſub figura ſenaria quæ proxima præter vnã eſt, vltra proximũ numerũ puncto notatum ſignemus:cæteráſque poſt eam ſuo quanque ordine. Rurſus deinde exquiramus numerũ aliquem primariũ,qui vnà cum 630 in numerum triplum 1890 ductus,poſteáque ſolus in numerum productum multiplicatus, numerũ ſupra ſe repoſitũ ſubductus ſic aboleat, vt poſtea etiam cubice ductus in ſeipſum, vel totum numerum à dextra proximo puncto ſignatum cum reliquo,ſiquod erit, vel quantum ex eo poteſt,deleat. Is autem eſt 4.nam 6304 in triplum numerum,videlicet 1890 ducta,producunt 11914560. Deinde 4 in ipſum numerũ productum multiplicata creant 47658240, quæ ſunt ſupra ſe poſitis notis præter poſtremam omnino æquales,atque eas ſubductæ delent. Poſtea 4 in ſe cubice ducta faciunt 64. quæ totum quod ſupereſt, ſic auferunt, vt nihil penitus ſuperſit. Numerum itaque propoſitum liquet fuiſſe cubum.

ET quoniam in cubi lateris inueſtigatione poſt triplicationem alicuius primarij numeri factam, ſtatim alius numerus primarius quærẽdus eſt,qui vnà cũ primario numero prius inuento in totũ triplum ducatur, deinde ſolus in productũ, atque iterum ſolus in ſe cubice multiplicetur(quia numerus ille primarius tam varie cõſyderandus eſt,primũ quid producit,quando pars eſt maioris numeri:iterum quid ſolus profert multiplicatus in productum, rurſus quid cubice in ſe ductus procreare valet)parũ exercitatos moratur hæc cogitatio quiſnã numerus primarius tot officia præſtare poſſit. Quamobrẽ,vt in cæteris omnibus, ita in hac re plurimũ

iuuabit exercitatio, quæ per aſſuetudinem, quantumuis ardua, pronà reddit. Cæterum non mediocriter conducet, ſi poſt numeri primarij inter parallelas poſiti triplicationem, priuſquam numerũ aliquẽ primariũ cum eo copulabis, circulũ ei adiũgas: tentéſque quẽ numerũ in triplũ ductus faciat. Deinde etiam tentari poteſt vnus aut alter numerus primarius, qui in triplum ſimiliter ducatur. & numerus ex hoc productus ad numerum priorem procreatum ex ductu numeri circulum aſſumentis addatur. Huiuſmodi enim numerorum productorum additio eundem proferet numerum, qui fuiſſet natus ſi ab initio numerus ille primarius quem tẽtauimus, vnà cũ numero primario prius inter parallelas poſito, fuiſſet in triplum ductus. Sic enim cũ videris quem numerũ ea multiplicatio atque additio procreabit, facile coniecturã capies tũ ex numeri ſuprà repoſiti, tũ ex numerorũ productorũ atque additorũ vel magnitudine, vel exilitate, quis numerus primarius aſſumpti circuli vicẽ ſubiturus maxime quadrabit. Veluti in exẽplo iam dato, poſt primam ſenarij numeri inter parallelas poſiti triplicationem ex qua fiũt 18, ſi quis aſſumens circulũ, 60 in 18 ducat, numerus productus erit 1080. Deinde tentemus, ſi 3 in 18 ducantur, quid fiat: & producẽtur 54. quæ ſi addantur ad 1080, ſurgent 1134. qui numerus ſimiliter prodijſſet ſi ab initio 63 in 18 fuiſſent ducta. Poſtea ſi tria in numerũ ipſum productũ 1134 ducantur, fient 3402. quæ ſatis apte reſpondẽt numeris ſupra ſe repoſitis, & tamẽ ſatis ſupererit, vt tria in ſe cubice poſtea ducãtur. At ſi per notã binarij id facere tẽtaremus, numerus ſuprà reponẽdus nimiũ redũdaret. ſi per 4 aut 5: numerus productus foret maior, quàm vt à ſupra ſe repoſitis poſſet ſubduci. Longe autẽ facillimũ erit, ſi poſtquam numerum inter parallelas poſitũ, adiuncto circulo, in triplũ duxiſti, primũ de numero quinario qui inter primarios medius eſt, eo modo tentes quo ſuprà dictũ eſt. Ita ſtatim ſcies, an maiore numero primario, an minore ſit opus. Ad eundem modum tentare proderit, quoties poſt triplicationem numerus aliquis primarius inquirendus eſt, qui ea officia præſtet, quæ paulo antẽ ſunt dicta. Hoc exẽplum explicuiſſe ſuffecerit, vt viam cubi lateris inueſtigandi daremus. Alterum pluriũ notarũ ſpectandum conſyderandúmque adiũgamus.

2 Reliquum
Numerus
6 5 9 7 7 5 4 1 0 6 7 1 6 1 8 non cubus.
8 7 0 5 6 Radix cubi

CVTHEBERTI TONSTALLI IN LIBRVM SECVNDVM PRAEFATIO.

MVLTI qui in ſupputãdis integris nihil hærent, poſtquam ad numerandas partes quæ nuſquam non ſunt obuiæ, ventum eſt, libellos abijciunt: non aliam (opinor) ob cauſam, quàm quòd non ſit tam expedita partium quàm integrorum numeratio. qui ſi ſecordia abiecta, animum intenderent: cuncta, quæ per nimias delicias corruptis animis ardua videntur, reperirẽt prona. Nam vt integrorum numeratio penè à nemine ignoratur, qui modo ſenſum cõmunem habet, & eam vult perdiſcere: ſic quæ de partibus numerandis traduntur, vt non admodum acutam mentis aciem requirunt, ita poſcunt hominem nec dormitantem, nec ſtupidum, & cuius animus inter legendum minime peregrinetur. Et quanuis hæc non, ſicut AEſopi fabellæ, cum quadam voluptate penetrent intellectum: propterea tamẽ ſtudioſis nequaquam eſt ceſſandum. Cogitent quemadmodum pulcherrimis quibuſque difficultatem prætexuit rerum ipſa natura: quæ nihil, quod eſt magnũ, cito prehendi voluit. ſimúlque ſecum reputent, quantus in tota vita pro tantillo ſtudio percipietur fructus. Nam quis (quæſo) mortalium vitam ſic poteſt tranſigere, vt non ſit ei frequenter habenda ſupputatio? in qua labi & decipi, præterquam quod damnoſum eſt, ridiculum putatur. Veruntamẽ hanc, quam nunc aggredimur, partium ſupputationem non magno egere acumine, vel hinc licet cognoſcere, quòd mercatores in hac nihil cedunt philoſophis: & neſcio an longe ſuperent. adeò magis induſtriam, quàm ingeniũ poſtulat. Illud omnino præfandum eſſe duximus. Quiſquis integra ſupputare neſcit: is ne partium calculum putet ſe poſſe diſcere. Quippe qui nimium ingenio fretus ordine præpoſtero ſtolidus id tentabit: is ſimile quiddam facere videbitur, vt ſiquis ignorans literas, moliretur legere. Quamobrem illa omnes in promptu prius tenere debẽt, quàm ad hæc accingantur. Alioqui, vt in adagio eſt, & operam & oleum perdent.

OMNE integrum in partes, quotcunque velis, ſolui per intellectum poteſt. Et quemadmodum integrorum numeratio ab vno incipit, atque in infinitum poteſt extendi, ſic integrorum ſectio à ſecundis orditur partibus. (Neque enim in pauciores partes quàm duas quicquam diſſolui poſſe rerum natura patitur.) In infinitum autem protenditur arbitrio ſecantis. Iterum partes ipſas in alias particulas, atque eas quidem innumeras, intellectus ſoluit. Particularúmque ipſarum rurſus alia fragmenta excogitari poſſunt, vt res finē habitura nō ſit, ſi cui minutias cōſectari libet. Ad eiuſmodi autē partes recte numerandas duo omnino requiruntur numeri. Alter qui partes diſſectorum numeret, quem Arithmetici numeratorē appellant: qui quot in ſe capit vnitates, tot partes diſſecti nobis repræſentat. Alter qui partibus ipſis ſua nomina tribuat, denominatorē eum vocant, quòd quot vnitates in ſe contineat, in tot partes totum quippiam diuiſum eſſe denotet. Vtpote tres quartæ, quæ ſunt tres partes alicuius integri in quatuor diuiſi. Scribuntur autem ita partes, vt numerator ſupra breuem lineā ductā: denominator infra eam ponatur, ad hũc modum $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{4}{5}$ numeratórque ſemper prius pronuntiatur, quàm denominator: vt dicamus, duæ tertiæ, tres quartæ, quatuor quintæ.

VERVNTAMEN harum minutiarum quædam ſimplicia fragmenta dicuntur: hæ ſunt partes, in quas integra ſoluuntur. quædam fragmentorū fragmenta, quas minutiarū minutias Arithmetici vocare ſolent: hæ ſunt particulæ, in quas rurſus partes frangũtur. Nos in hoc libro, ſicut partes integrorū ſimplices, aliquando fragmenta, ſæpe etiam minutias indiſcriminatim vocabimus: itidem quoque appellabimus partium particulas, interdum minutiarum minutias, nonnunquam fragmentorum fragmenta. Inter quas ſpecies plurimum, cum in ſcribendo & in enuntiando, tum etiam in multis alijs intereſt. Nā quæ ſunt ſimplices minutiæ ſic ſcribuntur, vt breuis linea ſupra ſe numeratorē, infrà denominatorem habeat, vti iam diximus. Et ſi plura ſimplicia fragmenta ſcribēda ſũt, modico interuallo diſtinguũtur. ad hunc modũ, $\frac{1}{2}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$ vnicúmque numeratorem, & vnicũ denominatorem ſingulæ habent, & recto caſu ſemper enuntiantur, vt dicamus vna ſecunda, duæ tertiæ, tres quartæ. Quæ verò ſunt partium particulæ, duos

aut interdum plures & numeratores & denominatores capiunt. Quarum aliæ ad ſiniſtrā ponendæ recto enuntiātur caſu, lineámque quæ habent mediam:hæ ſunt ipſæ particulæ. Aliæ ad dextram locandæ,obliquóque caſu enūtiatæ media linea carēt: hæ ſunt partes,quarū ſunt particulæ:vt ſi duas tertias vnius quartæ notis ſcribere velis,ad hunc modum facias, $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{4}$ Id autem ſignificatur,vt ſint duæ tertiæ partes vnius partis quartæ ab aliquo integro diſſectæ,quod in quatuor partitum eſt. Vel ſi tres quartas vnius tertiæ vnius ſecūdæ ſignare cupis, ad hūc modum notes, $\frac{3}{4}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{2}$ quod exprimit tres quartas partes vnius partis tertiæ alicuius ſecundæ ab integro diſſectæ,quod in duo diuiſum eſt. Itaque dum fragmētorum fragmēta ratiocinator tractat,ſummopere cauere debet ne dormitanti obrepat obliuio quarum partium ſint particulæ, néve pro diſſectis integrorum partibus partium fragmenta computet. Nam ſi id committat,error calculi non mediocris ſequetur.

SEMPER autem in omnibus diſſectorum minutijs, quo maior denominator fuerit; eo minores erunt partes, remotioréſque ab integris:& quo fuerit minor,eo partes maiores erunt,atque ad integra propius accedent. Nam duæ partes ſecundæ maiores ſunt quàm duæ tertiæ,& duæ tertiæ maiores quàm duæ quartæ,& duę quartæ maiores quàm duæ quintæ: & ſic in vniuerſum quāto magis numerando creſcit denominator,tanto magis quantitate partes diminuuntur.

AD numerationem autem partium plenius pernoſcendam,tria in primis obſeruanda ſunt. Primum, vt quandocunque numerator & denominator ſunt æquales:tunc partes vnum integrū conſtituant. Exempli gratia, $\frac{3}{3}$ $\frac{5}{5}$ $\frac{7}{7}$ tres tertiæ vnum integrum faciunt: ſic quinque quintæ, ſic ſeptē ſeptimæ, ſic id genus reliqua. Alterum illud eſt,quādocunque numerator maior eſt denominatore, quot vnitatibus denominatorē numerator ſuperat,totidem partes plures ſunt quàm quæ integrum faciunt. vt nouem octauæ integrum & partem octauam faciunt,ſeptem quintæ integrum & duas quintas,ſex quartæ integrum & duas quartas. $\frac{9}{8}$ $\frac{7}{5}$ $\frac{6}{4}$ Tertium eſt, vt quandocunque numerator minor eſt denominatore: quot vnitatibus numerator denominatore minor eſt,totidem partes deſint ad integrum cōponendum,vt duæ tertiæ ſunt duæ partes alicuius integri in tria diſſecti:quibus tertia pars deeſt ad integrum faciendum : Itidem tres quartæ quarta parte minus continent,quàm integrum. $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$ Atque itidem in reliquis ſimilibus.

ITAQVE denominatoris augmentum partes quantitate quidem minores, numero verò plures reddit. Quemadmodum econuerſo numeratoris incrementum vel integra progignit, vel partes multo propiores integris.

AD HAEC cum omnis integrorum inter ſe multiplicatio & quantitate & numero maiorem edat fœtum, nempe numerū productum: econtrario in partibus euenit, vt minutiæ multiplicatæ quantitate minores, numero plures comperiantur.

DE PARTIBVS DISSIMILIBVS AD SIMILITVDINEM REDIGENDIS.

CVM IN ſupputationibus faciendis partes aliæ alijs maiores, longéque diſſimiles frequenter occurrant, interdū fragmentorum fragmenta ſimplicibus aggregata fragmentis, nōnunquā integra partibus intermixta: ne tam varium chaos rationes totas conturbet: eiuſmodi tam diuerſa prius ad ſimilitudinem quandam reducere neceſſe eſt, quàm ea vel addere, vel ſubtrahere, vel multiplicare, vel diuidere quiuis aggrediatur. quo fiet, vt operis æqualitas cuncta tum prona, tum facilia reddat: quando alioqui, ſiquis tam diſſimilia inter ſe committere tētaret, in labyrinthum inextricabilem ſeſe ingereret. Igitur antequā illa quiſpiam moliatur: hæc, quæ de diſſimilibus in vnam faciem redigendis præcepta ſequuntur, prius tenere curet.

SIVE autem maiores partes in minores mutare libet, ſiue ecōuerſo minores in maiores redigere: partes quælibet in quaſuis trāſformantur: ſi partium, quas transfigurare volumus numeratorem in denominatorem earum, in quas ſunt tranſformandæ, multiplicemus: & numerum ex hoc enatum per earum partium denominatorem, quas tranſfigurare eſt animus, diuidamus. Quo fiet, vt partitionis numerus partes illas edat, in quas fit tranſformatio. Quod quidem ſolum eruditis præcepiſſe ſuffecerit. Cæterū vt rudium habeatur ratio: vtranque ſpeciem ſeorſum explicabimus. Itaque maiores partes in quaſuis minores tranſformantur: ſi maiorum partium numeratorem in denominatorem minorum multiplices, & numerum ex hoc enatum per maiorem denominatorē diuidas. Quo peracto numerus partitionis patefaciet quot partes minores ex maiorum tranſformatione naſcuntur. vt ſi tres quartas ad octauas tranſformare velis: per tria, maiorum partium numeratorem, octo minorum denominatorem multiplices: & pro-

deunt viginti quatuor. quæ deinde per quatuor maiorum denominatorem diuidas: & numerus partitionis ſex habebit. Ex tribus igitur quartis ad octauas reductis ſex octauæ conſurgunt. Et ſi duodecim tertias ad quintas tranſfigurare cupis: duodecim maiorum partium numeratorem, in quinque denominatorem minorum ducas, & ſexaginta naſcuntur: quæ per tria maiorum denominatorem diuidas, & numerus ſectionis viginti creabit. Sic ex duodecim tertijs, viginti quintæ generantur. Quòd ſi tres quintas ad ſeptimas vis reducere: per tria maiorum partium numeratorem, ſeptem denominatorem minorum multiplica: & procreabis viginti vnum. quæ poſtea per quinque maiorum denominatorem diuide: & numerus partitionis quatuor oſtendet. vnúmque reſtabit reliquum, quod vnam quintam vnius ſeptimæ ſignificat. Sic ex tribus quintis ad ſeptimas reductis fiunt quatuor ſeptimæ, & quinta pars vnius ſeptimæ. Nam quādocunque in eiuſmodi reductione reliquū occurrit, partis erit particula, denominationémque in recto caſu à maiorū partium denominatore qui diuiſor extitit, ſumet, alterū verò in caſu obliquo à denominatore minorū.

MINORES partes è conuerſo in quaſlibet maiores tranſfigurātur, quando per numeratorē minoris denominator maioris multiplicatur, & numerus inde prouueniens per minoris denominatorem diuiditur. tunc enim numerus partitionis palàm indicabit quot partes maiores ex minorum tranſfiguratione ſurgunt: vt ſi ſex nonas in tertias quis commutare velit, per ſex minorum partium numeratorem, tria denominatorem maiorum multiplicet: & creabit decem & octo: quæ deinde per nouem minorum denominatorem diuidat, & in numero ſectionis duo comperiet. Itaque ex ſex nonis in tertias cōmutatis duæ tertiæ generantur. Et ſi duodecim ſextæ in quartas ſint mutandæ, duodecim numerator minorum partium in quatuor maiorum denominatorem ducantur, & progignūtur quadraginta octo: eáque poſtea per ſex denominatorem minorum diuidantur: & octo in numero partitionis erunt. Ita duodecim ſextæ reducuntur ad octo quartas. Quòd ſi ſeptem octauas ad quintas quis reducere cupiat, ſeptē numeratorem minorum partium, in quinque denominatorem maiorum ducat, & conficiet triginta quinque: quæ deinde per octo denominatorem minorū diuidat, & numerus partitionis quatuor habebit, & reliquum ſupererit, tres octauæ vnius quintæ. Quamobrem ex ſeptem octauis in quintas commutatis quatuor quintæ oriuntur,

& tres octauæ vnius quintæ. Nã in eiuſmodi reductione fragmẽtum fragmenti quãdocunque occurrit, denominationem in caſu recto à minoris fragmenti denominatore per quem fit ſectio, capit, denominationémque in obliquo à denominatore maioris.

DIVERSARVM denominationum partes ad eaſdem denominationes rediguntur, quando vnius fragmenti denominator per alterius denominatorẽ multiplicatur: nã numerus inde proueniẽs denominator communis erit. vt ſi duas tertias & tres quartas ad eandem denominationem velis reducere, tria denominatorẽ primi fragmenti per quatuor denominatorem ſecundi multiplices: & enaſcentur duodecim denominator communis. $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$ 12.

QVÒD ſi ſcire cupis, quot duodecimæ partes ſeorſum ſint in duabus tertijs: duo numeratorem illius primi fragmenti, in quatuor denominatorem poſterioris ducas, & octo pro numeratore procreantur: quibus denominator cõmunis ſub linea ſuppoſitus indicat in duabus tertijs octo duodecimas deprehendi. $\frac{8}{12}$ Itidẽ ſi vis ſcire quot duodecimæ partes ſeorſum ſint in tribus quartis: tria numeratorem ipſius ſecundi fragmenti, in tria denominatorẽ primi multiplices, & nouem pro numeratore conſurgent: quibus denominator communis ſub linea ſubiectus demonſtrat in tribus quartis nouem duodecimas inueniri. $\frac{9}{12}$

DEINDE ſi ad cõmunem denominatorẽ numeratorem etiam cõmunem vis inueſtigare, prioris fragmenti numeratorẽ in denominatorẽ poſterioris, & ſimiliter numeratorẽ ſecundi fragmẽti in prioris denominatorẽ, ad formã crucis diui Andreæ, multiplica: numerſque ex his duabus multiplicationibus proueniẽtes ſimul addãtur: & numerus inde proueniẽs numerator cõmunis erit. Vt ſi duo numerator primi fragmenti, in quatuor denominatorem ſecundi ducantur, fient octo. Et ſi tria ſecũdi fragmenti numerator, per tria denominatorem primi multiplicentur, ſurgent nouẽ: quæ addita ad octo faciunt ſeptendecim, qui numerus erit numerator communis. Ita duæ tertiæ & tres quartæ ad eandem denominationem reductæ numeratorem habent communem ſeptendecim, denominatorem verò duodecim. $\frac{17}{12}$

SI VERÒ plura fuerũt fragmenta, vti duæ tertiæ, tres quartæ, quatuor quintæ: poſt duo priora fragmenta, ſicuti diximus, reducta, iterum denominator communis prius inueſtigatus per tertij fragmenti denominatorem multiplicetur, & ſurgent ſexaginta omnium denominator communis. $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{17}{12}$ $\frac{4}{5}$ 60

QVOD ſi ſcire cupis quot partes ſexageſimæ ſint in quouis fragmento, numeratorē ipſius fragmenti in denominatorē communem multiplica, nempe ſexaginta, numerúmque procreatum diuide per eiuſdem fragmenti denominatorem: ita deprehendes in duabus tertijs quadraginta ſexageſimas, $\frac{2}{3}$ $\frac{40}{60}$ & in tribus quartis quadraginta quinque ſexageſimas, $\frac{3}{4}$ $\frac{45}{60}$ & in quatuor quintis quadraginta octo ſexageſimas. $\frac{4}{5}$ $\frac{48}{60}$

DEINDE numeratorem omnium fragmentorum cōmunem inueſtigaturus prius reductorum fragmentorum numeratorē per denominatorem tertij, & numeratorem tertij per denominatorem fragmentorum prius reductorum multiplica. numeróſque ex his duabus multiplicationibus generatos ſimul adde, & numerator communis omnium fragmentorum prodibit. Vt ſi ſeptendecim, prius reductorum numeratorem communem, in quinque tertij fragmenti denominatorem ducamus, indéque procreemus octoginta quinque, & iterum duodecim communem prius reductorum denominatorem, in quatuor tertij fragmenti numeratorem multiplicemus, atque ita generemus quadraginta octo. hóſque duos numeros ſimul coniungamus, enaſcentur centum triginta tria. Is numerus erit omnium fragmentorum numerator communis. ſic duæ tertiæ, tres quartæ, & quatuor quintæ ad communem numeratorem & denominatorem reductæ, fiunt centum triginta tres ſexageſimæ. $\frac{133}{60}$ Eodem modo progrediendum eſt, etiam ſi plura fuerint fragmēta ad eandem denominationem reducenda: vt primis quibuſque, quemadmodum diximus, expeditis, proxime ſequentia ad eundem modum abſoluantur, donec per omnia fragmenta ſit diſcurſum.

EX prædictis nimirum liquet numerū ſtatim inueniri poſſe, qui partes quaſcunque volumus, denominatas habet. Quippe ſi partes omnes denominatas inter ſe multiplicemus, numerus procreatus partes eas cōtinebit. Exempli gratia, ſi numerū aliquem cupis exquirere qui capiat vnam ſecundam, vnam tertiā, vnam quartam, vnam quintam, vnā ſextam, vnam ſeptimam, $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{7}$ omnes has partium denominationes inter ſe multiplica: quæ generāt quinque millia & quadraginta: is eſt numerus quæſitus.

IN eiuſmodi autem numero ſinguli numeratores, partes plures vſque ad totidem cōtinere poſſunt, quot in denominatoribus ſingulis reperientur: nam in eodem etiam deprehendas vnam ſecundam, duas tertias, tres quartas, quatuor quintas, quinque

ſextas,ſex ſeptimas, $\frac{1}{2}\ \frac{2}{3}\ \frac{3}{4}\ \frac{4}{5}\ \frac{5}{6}\ \frac{6}{7}$ vel ſi mauis reperias duas ſecũdas,tres tertias,quatuor quartas,quinque quintas, ſex ſextas,ſeptẽ ſeptimas, $\frac{2}{2}\ \frac{3}{3}\ \frac{4}{4}\ \frac{5}{5}\ \frac{6}{6}\ \frac{7}{7}$ Partes autem vnius atque eiuſdem numeri plures in numeratore quàm in denominatore contineri nequeunt: nam is numerus ea ratione ſeipſa maior eſſet, quod eſt contra rerum naturam: veluti ſi quæras numerum qui quinque quartas habeat, fruſtra inueſtiges· quippe cum quinque quartæ vnum integrũ & quartam præterea partem cõſtituant. at nullus numerus quarta parte ſeipſo maior haberi poteſt. Minimus autẽ numerus qui partes quaſcũque velis denominatas habeat,quéadmodum ſit inueſtigandus,paulo pòſt dicemus, quando trademus quomodo partes ad minimam ſui nomenclaturam redigantur.

PARTIVM particulæ quæ fragmentorum ſunt fragmenta, & minutiarum minutiæ etiam nuncupantur, in integrorum partes quas ſimplices vocant minutias mutantur, ſi earum numeratores inter ſe multiplicentur, vt vnus omnium communis numerator fiat: atque itidem earum denominatores in ſe ducantur, vt vnus omnium communis denominator enaſcatur. Ideóque ſi ad eandem denominationem reducere cupias duas tertias vnius quartæ vnius ſecundæ $\frac{2}{3}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{2}$ vnitatibus in duo ductis,tantum duo ſurgunt:cum vnitas alios numeros non multiplicet. ſic oritur numerator communis. Deinde tria in quatuor ducta creant duodecim, quæ iterum in duo multiplicata producunt viginti quatuor. ita compertus eſt denominator communis. Quamobrem duæ tertiæ vnius quartæ vnius ſecundæ ad ſimplicia fragmẽta redactæ,procreant duas vigeſimasquartas vnius integri. $\frac{2}{24}$

INTEGRA in partes quaſcunque volumus franguntur,ſi numerus integrorum per denominatorẽ illarum partium quas procreare cupimus,multiplicetur: quippe numerus ex multiplicatione generatus enatarum partium ſummam demonſtrabit. Etenim ſi integrum ad ſextas reducere eſt animus, vnitatem per ſex multiplicemus,& enaſcẽtur ſex: qui numerus erit partium. Si tria integra ad ſextas reſoluere libet, ſex in tria ducantur: ita fient decẽ & octo:qui numerus exiſtit partiũ,ſolutis in ſextas trib⁹ integris.

SIQVA vero integra vnà cum partibus occurrãt quæ ad partium denominationem reducere velimus, numerum integrorum per denominatorem partium multiplicemus,& numero procreato partium numeratorẽ addamus: indéque creſcenti numero eundem denominatorẽ ſupponamus,linea interpoſita. Exempli gra-

tia. ſi quinque integra & tres quartas ad eandem denominationē reducere cupimus, integrorum nota primum ſcribatur: deinde ante eam ad dextram, ipſum fragmentum, breui linea interſerta ad hunc modū, 5 $\frac{3}{4}$. quinque deinde numerum integrorū, per quatuor denominatorem fragmenti multiplicemus, & conſurgent viginti: quibus addita tria numeratorē communē viginti tria creāt. his ſub linea media, quatuor denominatorem ſubijciamus: ſic nobis enaſcentur ex hac reductione viginti tres quartæ $\frac{23}{4}$.

QVÒD ſi integra & plura ſimplicia fragmenta ad vnum ſimplex fragmentum reducere quis velit, numerum integrorū & primum fragmentū, ſicuti iam præcepim⁹, abſoluat. Deinde fragmētum ſimplex ex hoc enatū cum alijs ſequentibus copulando, per ſingula fragmenta diſcurrat, donec vniuerſa in eandem denominationem tranſſformauerit eo modo quo ante dictum eſt.

SI VERO integra & partium particulæ ſimul reperiantur, & ad ſimplex fragmentum velis ea reducere, primum partium particulæ ad ſimplicia fragmenta reducendæ ſunt, ſicuti ante præceptum eſt: & tum demum integra cum his in eandem denominationem ſunt copulanda.

ITIDEMQVE per omnia fiet, ſi integra & plura fragmentorum fragmenta ſeſe ſimul offerant. his nanque omnibus prius ad ſimplicia fragmenta redactis, cætera ſeruentur quæ iam prædicta ſunt.

PARTES econuerſo reducuntur ad integra, ſi numeratorem ipſarum partium per earum denominatorē diuidamus. nā numerus partitionis integra cōtinebit. Vt ſi decem & octo tertiæ ad integra reducendæ ſint, decē & octo per tria diuidamus: & numerus partitionis prodibit ſex. totidē itaque ſunt integra. Vel ſi ex viginti duabus quartis integra procreāda ſint, viginti duo per quatuor ſecemus, & in numero partitionis quinque deprehendentur, atque duo reliqua. Igitur quinque fiunt integra: & duæ quartæ ſuperſunt. quia ſemper in omni diuiſione tam integrorum quàm partium, reliquum, ſi quod reſtabit, à diuiſore, per quem ſectio facta eſt, ſuam denominationem ſumet. Ipſum autem reliquū, quod integrum creare nequit, eadem proportione ſe habet ad integrū, ſicut numerator ad denominatorem, qui diuiſor extitit. Quocirca cum per integrum diuiſorem, id quod reliquum erit, amplius ſecari non poſſit, per dimidium diuiſoris, ſi modo is dimidiari poteſt, diuidatur: & numerus ſectionis dimidium oſtendet integri:

vti in exemplo proximo. vbi duæ quartæ ſuperſunt: per duo, diuiſoris dimidium, facta ſectio, cum numerus ſectionis ſit vnum, vnum dimidium monſtrat. Si verò id fieri non poteſt, per tertiam diuiſoris partem reliquum diuidatur, modo tantũ ſuperſit: & numerus partitionis vel vnam tertiam vel plures indicabit ſupereſſe. Puta ſi per nouem numerus eſſet diuiſus, & ſex manerent reliqua: per tertiam diuiſoris partem, nempe tria, ſectio facta duas tertias vnius integri ſupereſſe manifeſtat. Alioqui ſi per tertiam ſectio non quadrabit, per diuiſoris partem quartam, niſi minus ea ſuperſit, reliquũ ſecetur: quippe ſic facta ſectione, numerus partitionis patefaciet an vna quarta remaneat, an plures. Veluti ſi per ſexdecim numerus fuiſſet diuiſus, reliquáque eſſent duodecim: quarta diuiſoris pars pro reliquo ſecando ſumpta, in numero partitionis tria producit, quæ tres partes quartas vnius integri demonſtrant. Si nec id quidem procedit, tum de quinta aut ſexta, aut alia quauis diuiſoris parte, ad eundem modum tentãdum. Cæterum ſi nihil horum iuuare poteſt, reliquũ ipſum ad minimam ſui nomenclaturam redigendum eſt, his qui ſequuntur, modis.

PARTES reliquæ, quæ vnum integrũ conficere non poſſunt, ad minimam ſui nomenclaturam rediguntur, ad hunc modum. Numerator & denominator toties dimidiãdi ſunt, quoties id fieri poteſt: in ſinguliſque dimidiationibus, linea interpoſita, numerator ſupra eam, denominator infra ſcribatur: & poſtrema dimidiatio notetur. quia qua proportione ſe habebit ipſius numerator ad denominatorem ſubiectum, eadem primus numerator denominatorem ſuum reſpiciet. Et ſi in alterutro eorum inter dimidiandum impar occurrit numerus, quia amborum dimidiatio amplius progredi non poteſt, illic erit ſiſtendum. Continuóque maximus numerus ambos communiter numerans eſt inueſtigãdus, qui eorum vtrunque per diuiſionem poſſit exhaurire.

MAXIMVS numerus duos communiter numerans ſic inueſtigatur. Numeratorem & denominatorem poſt dimidiationem ceſſantem, à ſeinuicem ſubtrahe, quoties id fieri poteſt. ex qua ſubductione frequenter repetita, ſi eorum alter ad vnitatem ſoluitur, eiuſmodi numeri contra ſe primi ab Arithmeticis vocantur: & ad minorem nomenclaturam redigi nequeunt, cum omnes numeri contra ſe primi ſua proportione ſint minimi. Exempli cauſa, reliquæ ſint viginti ſex quinquageſimæ, quas ad minimam nomenclaturam redigere velimus $\frac{26}{50}$: harum numerator dimidiatus re-

linquit tredecim. at denominator per medium ſectus creat vigin ti quinq;. ſic ex dimidiatione, tredecim vigeſimæ quintæ generã-tur, $\frac{13}{25}$. Vltrà propter imparem in vtroque occurrentem numerũ dimidiatio non procedit: quanuis, etiam ſi in alterutro ſolo fuiſſet imparitas, dimidiatio ceſſaſſet. Quærendus eſt ergo per crebram alterius ab altero ſubductionem, maximus numerus ambos communiter numerans. In primiſque tredecim numeratorem à vigin ti quinque denominatore ſubducamus, & relinquemus duodecim, ea rurſus à tredecim numeratore ſubtrahamus: & vnum remanebit, quod nobis indicat numeros ex dimidiatione ceſſante repertos, contra ſe primos eſſe. $\frac{26}{50}$ $\frac{13}{25}$ $\begin{array}{r}25\\13\\\hline 12\end{array}$ $\begin{array}{r}13\\12\\\hline 1\end{array}$

QVÒD ſi crebra numeratoris & denominatoris ſubductione à ſeinuicem facta, neuter eorum ad vnitatem ſoluitur, tandem omnino reperientur ſimiles. Quod quando compertum eſt, ſimul inuentus eſt maximus numerus ambos communiter numerans: is videlicet, in quo ſimiles deprehendũtur: per quem dati reliqui nu merator ſeorſum diuidẽdus eſt, atque itidem denominator: ſicque numerus vtriuſque ſectionis tam alterũ prioris numeratoris numeratorem ea proportione minimũ, quàm alterũ prioris denomi natoris denominatorẽ, itidem etiam minimũ ea proportione demonſtrabit: qui minimam indicabunt nomenclaturam, ad quam partes redigi poſſunt. Atque ita manifeſtum eſt, maximum numerum duos cõmuniter numerantem eos numerare per numeros ea proportione minimos. Exemplum paratũ eſt: ſi triginta quatuor centeſimas ſecundas ad minimam nomenclaturam redigere velimus: ſtatim nanque ex dimidiatione decẽ & ſeptẽ quinquageſimæ primæ prodeunt: qui numeri ſunt impares & cõtra ſe primi. Poſtea ex prima numeratoris à denominatore ſubductione, triginta quatuor ex denominatore reſtabunt: deinde iterũ repetita ſubductio relinquit in denominatore, decem & ſeptem. ſimilitudinémque vtriuſque numeri tam numeratoris quàm denominatoris oſtendit. Is ergo numerus decem & ſeptem, qui maximus eſt, ambos cõmuniter numerans, eorum vtrunque diuidat. Quo fiet vt in numero partitionis ex numeratoris quidem ſectione vnum inueniatur: ex ſectione verò denominatoris, tria. Igitur vna tertia, minima nomenclatura eſt, ad quam perduci poſſint vel decem & ſeptem quinquageſimæ primæ, quæ ceſſante dimidiatione repertæ ſunt $\frac{17}{51}$ $\frac{1}{3}$: vel triginta quatuor centeſimæ ſecundæ, qui propoſitus eſt numerus, $\frac{34}{102}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{17}{51}$ $\begin{array}{r}51\\17\\\hline 34\end{array}$ $\begin{array}{r}34\\17\\\hline 17\end{array}$

ALTERVM exemplum dari poteſt,ſi reliquæ ſint quatuordecim vigeſimæoctauæ, quas ad minimam nomenclaturam reducere velimus, $\frac{14}{28}$. horum quatuordecim ſecta per medium,relinquunt ſeptē. at viginti & octo dimidiata creāt quatuordecim $\frac{7}{14}$ ſic ſeptem quartædecimæ ex dimidiatione generantur. Vltrà propter imparē numerum ſeptenariū dimidiatio non procedit:quærendus eſt ergo maximus numerus ambos communiter numerans,qui vtrunque tam numeratorem quàm denominatorem diuidendo deleat:is eſt ſeptem.ſemel enim ſeptem ſubducta numeratorem tollunt: quippe omnis numerus ſeipſum & numerare & ſubducere poteſt.rurſus ſeptem bis ſubtracta denominatorem etiam auferūt. numerus itaque partitionis vtriuſque peractæ palā indicat ſeptem quartasdecimas ad vnā ſecundam redigi. $\frac{7}{14}$ $\frac{1}{2}$ Quamobrem cum primū reliquum eandē rationem habeat,quam pro ſua portione ſuum habet dimidium, ad vnam ſecundā recidit.quatuordecim igitur vigeſimæ octauæ ad vnam ſecundā, quæ minima earum nomenclatura eſt,rediguntur. $\frac{14}{28}$ $\frac{1}{2}$

MINIMVS numerus qui partes quaſcunque volumus, denominatas habeat,ſic eſt exquirendus. Poſtquam partes,quas in numero aliquo inueſtigare deſtinamus,ſuis notis ſunt deſcriptæ,numerus qui partes illas vniuerſas habeat, ex denominatorum in ſe multiplicatione facile procreatur,quemadmodum ſuperius obiter admonuimus. Cæterum minimus numerus, qui partes eas capiat, maiorem,vt eruatur,poſcit induſtriam. Is autem proportione minima partes illas omnes habere comperietur,qui minimus numerus eſt,quem omnes illæ numerant. Itaque de primis quibuſque denominationibus primum expedire oportet,atque initio inueſtigare quis ſit minimus numerus à duabus primis denominationibus numeratus. Et quidem ſi hæ contra ſe primæ fuerint, vt nullus numerus eas numeret præter vnitatem:quia ſunt ſua proportione minimæ,quod ex alterius in alterum ductu generabitur, erit minimus numerus ab eis numeratus. Sin alius præter vnitatē numerus eas numeret, ſumantur partes ea proportione minimæ: quæ quēadmodū exquirantur,proximo capite edocuimus:quæ cū ſunt inuentæ,ſubnotētur ſub partibus quarū reſpectu ſunt minimæ. Deinde partes illæ maiores quarū reſpectu alteræ ſunt minimæ,per numeros ſua proportione minimos,maior per minorem, aut minor per maiorē,multiplicatæ minimū ab ipſis numeratum producēt. Nā ſecundū Euclidis ſcitū, Quilibet duo numeri mini-

mos numeros ſuæ proportionis,maior minorem,aut minor maiorem,multiplicãtes,minimũ ab ipſis numeratũ producunt. Qui numerus minimus à duabus primis denominationibus numeratus; ad hunc modũ inuentus, cum tertia denominatione ſtatim cõferendus eſt, minimúſque numerus ab illis numeratus ad eundem modum exquirendus. Is poſtquam cognitus erit, cum quarta denominatione ſimiliter conferatur, minimúſque numerus ab illis numeratus itidem eruatur. Idémque indagãdi modus per omnes denominationes,ſiquæ vlteriores fuerint,ſeruetur. Minimus autẽ numerus ab illis numeratus,qui poſtremo conferentur, partes omnes propoſitas minima proportione capiet. Exẽpla demus, quæ rem magis illuſtrent: atque inueſtigemus minimum numerum; qui vnam ſecundam,vnam tertiam, vnam quartam, vnam quintam,vnã ſextam,atque vnam ſeptimam habeat. $\frac{1}{2}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{7}$

IN PRIMISQVE exquiramus, quis ſit minimus numerus, quem duæ primæ denominationes numerant. quæ quia ſunt contra ſe primæ,duo in tria ducantur:& ſex enaſcentur. qui numerus minimus eſt, quem duo & tria numerãt, quíſque vnam ſecundam & vnam tertiam habeat. Iterũ ſex cum tertia denominatione,nempe cum quaternario conferamus: & quoniam numerus binarius ambos communiter numerat, bíſque in quatuor, & ter in ſex reperitur(quia tria & duo numeri ſunt ea proportione minimi)tria ſub ſex,& duo ſub quatuor ſubnotemus. Deinde vel ſenarium maiorem numerum per binarium, de duobus minima proportione ſubnotatis, minorem vel quaternarium minorem per ternarium, de duobus minima proportione ſubſcriptis, maiorem multiplicantes,duodecim procreabimus:qui numerus minimus eſt, quem ſex & quatuor numerant,quíque vnam ſecundam,vnam tertiam, & vnam quartam proferat. Rurſus duodecim cum quarta denominatione,videlicet cum quinario conferamus: qui numeri, quia contra ſe primi ſunt, atque ſua proportione minimi, quinque in duodecim ducamus, & ſexaginta creantur:qui minimus numerus eſt,quem quinque & duodecim numerant,quíque vnam ſecundã, vnam tertiam, vnam quartam, & vnam quintam producat. Deinde ſexaginta cum ſenario numero, quæ denominatio proxima eſt,conferamus. & quoniam ſenarius & ſeipſum per vnitatem, & ſexaginta per denarium numerat: decem & vnum, qui numeri ſunt ea proportione minimi, ſubſignentur. Itaque ſiue ſexaginta maiorem numerum per vnum, qui numerus de duobus minima

proportione ſubnotatis minor eſt, ſiue ſex minorem numerũ per decem numerum ex ſubſcriptis maiorem multiplicemus, ſexaginta iterum prodibunt: qui numerus minimus eſt à ſexaginta, & à ſex numeratus, & qui vnam ſecundam, vnam tertiam, vnam quartam, vnam quintam, atque vnam ſextam capiat. Demum ſexaginta cum ſeptem conferamus: qui numeri contra ſe primi, atque ſua proportione minimi comperiuntur: & ideo ſeptem in ſexaginta ducentes, quadringenta viginti procreabimus: qui numerus minimus eſt, quem ſexaginta & ſeptem numerant, quíque vnam ſecundam, vnam tertiam, vnam quartam, vnam quintam, vnam ſextam, & vnam ſeptimam proferre poteſt. Hac ratione numerus partes, quaſcunque volumus, denominatas complectens, exquiritur. Quinetiam ſi omnes hi denominatores in ſe multiplicentur, fient quinque millia & quadraginta: qui numerus itidem omnes eas denominationes habet. Cæterum numerus eas minima proportione capiens is eſt quem exquiſiuimus: nempe quadringenta viginti, qui numerus in illo duodecies continetur: quemadmodum ex illius ſectione per hunc facienda, cuiuis licet cernere. Alia itidem huius generis exempla, quæcunque occurrunt, ad hunc modum explicari poſſunt.

MODVS exquirendi pretiũ quarũuis partium hic eſt attingendus. Nam cum ex integrorum diuiſionibus partes quæ ſuperſunt, tam crebræ ſupputantibus occurrant, vt nuſquam fermè non ſint obuiæ: ne earum æſtimatio longa mora quempiam torqueat inueſtigantem, pro quanta pecuniæ ſumma valeant, operæ pretium eſſe duximus viam demonſtrare, qua id quoque deprehendi poſſit. Ea autem eſt eiuſmodi, Si per partium numeratorem pretium totius integri, cuius ſunt partes, multiplicetur, & numerus ex multiplicatione procreatus per earundem partium denominatorem diuidatur, numerus partitionis pretium indicabit partium. Reliquum verò, ſiquod ex ea ſectione reſtabit, ſupra diuiſorẽ ſtantem linea interpoſita, notetur. Exemplũ demus, vt magis quod dicim⁹, eluceat. Si ſingula vini dolia aureis viginti conſtiterunt, & duarũ tertiarum pretium ſcire cupimus, viginti per partium numeratorem, qui duo continet, multiplicemus, vt ſint quadraginta: quæ deinde per denominatorem, qui tria continet, diuidamus: & numerus partitionis ſurget, tredecim aurei: & ſupereſt vna tertia vnius aurei: quæ cum pretij ſit particula, nobiſcum conſyderemus, qua pecunia viliori poſſit æſtimari, ſicut iam dicemus.

MINVTIARVM quarumlibet pecuniæ reliquarum æſtimatio deprehẽditur ad hunc modum. Si pecuniæ ſumma, cuius pars eſt quoduis reliquum, in argenti libris per diuiſionem quæſita eſt: inueſtigemus, quot aureis, quot ſolidis, vel ſi libet, quot denarijs, aut quot nummis ſeſtertijs, aut quot ſemiſſibus, aut quot quadrãtibus, aut quot ſextantibus argenti libra æſtimatur. Vel ſi pecunia prior in aureis per ſectionem inueſtigata fuerit, exquiramus pro quot denarijs, vel ſi libet, pro quot nummis ſeſtertijs, aut pro quot obolis, aut pro quot quadrantibus, aut ſiquod æs ſignatum vilius in vſu eſt, aureus integer valeat. Deinde æſtimationem totius illius partis, cuius pars ipſum reliquum eſt, per reliqui numeratorẽ multiplicemus: numerúmque procreatum per ipſius reliqui denominatorem diuidamus: & numerus partitionis æſtimationem reliqui monſtrabit. Iterúmque ſecundum reliquum, ſiquod prodibit, notetur: & vlterius, ſi ita libet, ad eundem modum procedatur. Exemplum repetamus, quod proximo capite dedimus: in quo pretium duarum tertiarum vnius dolij viginti aureis empti, tredecim aureos inuenimus, & reliqua erat vna tertia vnius aurei. Quæ vt ſciamus quid afferat, vnum aureum centum nummis æſtimemus, quorum numerus in vnum reliqui numeratorem ductus tantum centum creat: quæ per tria reliqui denominatorem diuiſa in numero partitionis educunt triginta tres nummos: & iterum ſupereſt vna tertia vnius nummi, quam æreis adhuc ſextantibus ad eundem modum æſtimare potes. Igitur pretium duarum tertiarum vnius dolij viginti aureis empti erit, Tredecim aurei, triginta tres nummi, & vna tertia vnius nummi. Itaque in arbitrio eſt computãtis an pecuniæ æſtimationem ordine quodam exquirere velit, vt primum veſtiget quot argenti libras pecuniæ ſumma quæuis habeat, Deinde, ſiquid reliquum ſupereſt, quot id aureos faciat, Iterum, ſiquid remanet, quot id denarios creet, Tertio, ſiquid reſtat, quot id producat nummos, & ſic deinceps. Vel an ſtatim in primo reliquo ad viliſſimam pecuniam deſcendere malit, vt per eam reliquum æſtimet. Veruntamen vtrancunque viam elegerit, idem eſt indagandi modus.

AT SI ex integrorum ſectionibus partium occurrant particulæ, quarum pretium exquirere velimus, eas prius ad ſimplices integrorum partes reducamus. Deinde pretium ad eundem modum inueſtigemus, quemadmodum in ſimplicibus fragmentis iam diximus.

DE PARTIVM ADDITIONE.

PARTIVM additio, eſt plurium minutiarum ſeorſum propoſitarum in vnam ſummam collectio. Ea autem, quando partes eiuſdẽ ſunt denominationis, nullum habet negocium: ſola etenim numeratorũ fit additio: & numerus procreatus ſupra breuem lineam notatur, ſub qua denominator apponitur. Exempli gratia. ſi quatuor ſeptimas, quinque ſeptimas, ſex ſeptimas vis addere, ſolis numeratoribus per additionem coniunctis, fiunt quindecim ſeptimæ. $\frac{4}{7}$ $\frac{5}{7}$ $\frac{6}{7}$ $\frac{15}{7}$

QVANDO verò partes diuerſos denominatores habent, ſi binæ minutiæ fuerint: poſtquam ad communem denominationem ſunt redactæ, priorum numerator per denominatorem poſteriorum, & numerator poſteriorum per priorum denominatorem, ad formam × literæ Græcæ (quæ ſpeciem crucis diui Andreæ refert) multiplicari debent: numerique inde prouenientes ambo ſimul addi: & conſurget numerator communis. Et ſi plures præterea minutiæ diuerſos habentes denominatores occurrunt, primis quibuſque (quemadmodum diximus) expeditis, proximæ ſequentes ſimiliter copulentur, donec omnes abſolutæ ſint eo modo quo ſuprà dictum eſt, cum de diſſimilium denominatorũ reductione facienda præciperemus, vbi de communium numeratorum additione nonnihil etiam attigimus, ne quis id ibi deſyderaret, cum de cõmunium denominatorũ inueſtigatione diceremus. Quamobrem illic explicata exempla, hîc tantum ſpectanda ponemus, $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$ duæ tertiæ & tres quartæ denominatorem habent cõmunem duodecim, numeratorem verò cõmunem decem & ſeptẽ, ex additione quæ multiplicationẽ ad ſpeciem crucis factam ſequi debet $\frac{17}{12}$, quibus additæ $\frac{4}{5}$ quatuor quintæ procreabunt $\frac{133}{60}$ centum triginta tres ſexageſimas.

QVANDO minutiæ integris addendæ ſunt, ſi vnæ minutiæ erunt, notentur poſt ipſa integra. Veluti ſi $\frac{31}{37}$ addendæ ſint ad 12, ſic notis copulentur 12 $\frac{31}{37}$. Quòd ſi plures ſint minutiæ, & plura integra, prius integra in vnam ſummam componantur: poſtea minutiæ ſeorſum eo modo ſimul additę, quo ſuprà dictum eſt, his adiungantur. Veluti ſi $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{4}{5}$ addendæ eſſent ad 30 & 16, prius 30 & 16 coniungantur, & fient 46. tum deinde ipſæ minutiæ per additionem collectæ facient 2 $\frac{13}{60}$. quæ ad integrorum ſummã iungantur: & ſurgent 48 $\frac{13}{60}$.

AT SI minutiæ integris & minutijs addendæ ſunt, ſolæ minutiæ prius addantur eo modo quo dictum eſt. deinde quod ex earum ſumma ſurget, ipſis addatur integris: & ſiquæ minutiæ reſtabunt, poſt illa ſignētur, veluti ſi $\frac{5}{6}$ addēdæ ſunt ad $7\frac{3}{8}$, prius copulentur $\frac{5}{6}$ cum $\frac{3}{8}$, quæ faciūt $1\frac{5}{24}$. ea iungantur ad 7, & vniuerſorum ſumma fiet $8\frac{5}{24}$. Hæc via multo minus habet laboris, quàm ſiquis integra in minutias his adiunctas frangat, vnúmque de his corpus faciens poſtea alteris ea minutijs copulet. id quod quidam faciūt, ad hunc modum, Integra per partium denominatorē multiplicant, & numero procreato partium numeratorem addunt: atque ita numerator communis enaſcitur. cui denominatorem nihil immutatum ſub linea ſubdunt. Veluti in exemplo dato 7 integra in vicinum denominatorem 8 ducunt: & numero 56 producto, numeratorem 3 addentes, $\frac{59}{8}$ faciunt. quas poſtea coniungunt cum $\frac{5}{6}$ eo modo quo dictum eſt. & res ad idem recidet.

QVANDO integra integris & minutijs addenda ſunt, prius integra coniungantur, poſtea adiungantur minutiæ. Veluti ſi 6 cum $3\frac{1}{5}$ copulanda ſint, prius 6 ad 3 addantur, & fient 9: quibus apponantur minutiæ, & vniuerſorum ſumma fiet $9\frac{1}{5}$. Itidem ſi plura integra cum compluribus integris & compluribus minutijs cōnectenda ſunt: prius omnes minutiæ in vnum corpus colligantur eo modo quo dictum eſt. poſtea integra quæ inde proueniunt ad alia integra iungantur: & ſumma quæſita ſurget.

AT SI integra & minutiæ integris & minutijs addi debent, prius in vnam ſummam integra colligantur. Poſtea minutiæ ſeorſum eo modo quo dictum eſt, copulatæ, his addantur. Veluti ſi $3\frac{1}{2}$ ad $6\frac{1}{3}$ adiungi debent, prius 3 ad 6 addantur, & fient 9. poſtea $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{3}$ ſimul additæ faciunt $\frac{5}{6}$: quæ ad 9 adiungantur, vt omnium ſumma ſurgat $9\frac{5}{6}$. Eodem modo fiat ſi complura integra & complures minutiæ addendæ eſſent, vt prius integra colligantur, poſt copulentur minutiæ, ex quibus ſiue integra, ſiue minutiæ, ſiue ambo ſurgunt, addantur ad priora.

VBICVNQVE autem minutiarū minutiæ interueniunt: prius hæ ad ſimplices minutias redigantur: & tum demum in ſingulis ſecundum ea quæ ſuprà dicta ſunt, additio peragatur.

PARTIVM ſubductio, eſt ſummæ partium propoſitarum minoris à maiore ſubtractio: per quam relictus partiũ illarum numerus apparet. Oportet autem ſemper vel minorem ſummã à maiore, vel æqualem ab æquali ſubtrahere. nam maior à minore ſubduci nequaquam poteſt. Propoſitis itaque binis minutijs, atque vtrarunque numeratore in alterarum denominatorem inuicẽ in ſpeciem crucis multiplicatis, illæ minutiæ maiores eſſe dicentur, quarum numerator in alterarum denominatorem ductus maiorem profert numerum.

QVAMOBREM ſi binæ minutiæ eundem denominatorem habent, quarum alteras ab alteris cupias ſubducere, minor alterarum numerator à numeratore alterarum maiore, ſi inæquales extiterint, ſubducatur, & reliquum ſupra denominatorem ponatur, linea interpoſita. Exẽpli gratia. ſi duas tertias à ſeptem tertijs ſubtrahas, quinque tertiæ remanebunt. $\frac{2}{3}$ à $\frac{7}{3}$ $\frac{5}{3}$ Vbi verò numeratores & denominatores reperientur æquales, facta ſubductione nihil erit reliquum.

QVANDO autem minutiæ diuerſos denominatores habent, prius denominatores inter ſe multiplicentur: & conſurgens numerus denominator communis erit. Deinde priorum minutiarũ numerator in poſteriorum denominatorem, & numerator poſteriorum in denominatorem priorum, ad formã crucis ducatur. Quod vbi factũ erit, ſi numeri procreati fuerint inæquales: minor à maiore ſubducatur, & reliquum ſupra communem denominatorem, linea interiecta, ponatur. Exemplum illud eſto. Siquis ſubtrahere velit à quatuor quintis duas tertias, denominatoribus in ſe ductis, prius producatur denominator cõmunis. poſtea quatuor numerator alterarum minutiarum in tria alterarũ denominatorẽ ducta, creabunt duodecim, alterum numeratorem. Iterum duo, alterarum minutiarum numerator, in quinque denominatorem alterarum multiplicata, generabunt decem numeratorem alterum: quæ cum ſint pauciora quàm duodecim, ab illis ſubducantur: & duo relinquentur: quæ ſupra denominatorem communẽ prius procreatum locentur. ſic facta ſubductione, reliquæ erunt duæ quintædecimæ. $\frac{2}{3}$ à $\frac{4}{5}$ ſubducuntur, & relinquuntur $\frac{2}{15}$.

QVANDO minutiæ ſubducentur ab integris, ſuffecerit eas ab vno integro in minutias ſoluto, ſubducere: & quod tã de integris

quàm de minutijs reſtabit, totius ſubductionis erit reliquũ. Veluti ſi $\frac{4}{7}$ ſubtrahendæ ſunt à 12: ſumamus 1 de 12, & reſtabunt 11, ab illo autem vno demptis $\frac{4}{7}$, relinquentur $\frac{3}{7}$: quæ copulatæ cũ 11, reſtare faciũt 11 $\frac{3}{7}$: tantum ſupereſt ſi $\frac{4}{7}$ à 12 ſubducimus. Alij integra minutiarũ more, ſupra lineam notant, cui vnitatem ſubijciũt, ad integra deſignãda. Deinde quaſi minutiæ à minutijs ſubducẽdæ eſſent, poſt obliquã numeratorum in denominatores multiplicationem, minorẽ productũ à maiore ſubducunt, & ſupra lineam notãt, cui denominatorẽ ſubdũt. ita 7 in 12 ducta creãt 84: & 4 in 1 ducta faciũt 4. quæ ſubducta ab 84, relinquunt $\frac{80}{7}$ Ea, ſi reducas ad integra, fient 11 $\frac{3}{7}$. ita res ad idem recidet. $\frac{4}{7} \times \frac{12}{1}$ $\frac{80}{7}$

AT SI minutiæ ab integris & minutijs ſubducentur, fieri poteſt vt quæ ſubduci debent, minores ſint illis quæ integris adiunguntur. id quod ſi acciderit, tum ab illis minutijs ſubducantur, & integra intacta maneãt. quibus adiunctum id, quod reſtabit, totius ſubductionis erit reliquum. Veluti ſi $\frac{4}{9}$ ſubduci debent à 6 $\frac{9}{10}$, ipſis 6 integris manẽtibus, $\frac{4}{9}$ ſubducantur à $\frac{9}{10}$ eo modo quo dictum eſt, & reſtabunt $\frac{41}{90}$. quæ ſi 6 integris adiũgantur, relinquẽtur ex ea ſubductione 6 $\frac{41}{90}$. Quòd ſi minutiæ quæ ſubducendæ ſunt, maiores ſint his quæ integris adiunguntur: tunc de integris ſaltem vnũ in minutias adiunctas ſoluatur, vt poſtquã vnũ corpus ex his factũ ſit: ab eo fiat ſubductio. Veluti ſi $\frac{4}{5}$ ab 8 $\frac{1}{2}$ ſubtrahi debẽt, ſolue vnũ de illis 8 in ſecũdas, & fient $\frac{3}{2}$. à quibus deme $\frac{4}{5}$, & reſtãt $\frac{7}{10}$. quæ ſi iũgas cũ 7 relictis de 8: relinquentur 7 $\frac{7}{10}$: tantũ reſtabit ſi $\frac{4}{5}$ ab 8 $\frac{1}{2}$ ſubduces. Hæc via multo breuior eſt, quàm ſiquis omnia integra in minutias adiũctas frangat, & poſtea ab eis alias minutias ſubducat. id quod quidã faciũt: qui ducẽtes 8 in 2, & 1 adiungẽtes, creant $\frac{17}{2}$. à quibus demũt $\frac{4}{5}$ eo modo quo ſuprà dictũ eſt, & reſtant 7 $\frac{7}{10}$. ſic res ad idem recidet.

QVANDO integra ab integris & minutijs ſubduci debent, demantur integra ab integris, & quod ſupererit, totius ſubductionis erit reliquum. Veluti ſi 9 à 13 $\frac{3}{5}$ ſubtrahenda ſunt, eximantur 9 à 13, & reſtant 4 vnà cum minutijs $\frac{3}{5}$. ita ſi 9 à 13 ſubducas, id totum quod relinquitur, eſt 4 $\frac{3}{5}$.

VERVM ſi integra & minutiæ ab integris & minutijs ſubduci debẽt, tũc vtraque integra ſeorſum in minutias adiũctas ſoluãtur, vt vna minutiarũ facies vtrinque cõſiſtat. poſteáque ſubductio eodem modo fiat, ſicuti fieri ſolet quãdo minutiæ à minutijs ſubducuntur: qua peracta, denuo colligãtur integra ex eo quod reſtabit.

dato, cum duo in tria ducuntur, fiunt ſex: quæ ſi nihil præterea fieret, viderentur integra. Cæterū quia non duo integra per tria, ſed duæ tertiæ vnius integri per tres eius quartas multiplicādæ ſunt: ſimiliter partium denominatores in ſe ducūtur, vt partium diuiſióne, quæ per denominatoris multiplicationem fit, (quanto enim magis denominator creſcit, tanto magis partes comminuuntur) nimia numeratoris augmentatio tantum corrigatur, quantū plus iuſto creuerat, atque ea ratione ad æqualitatē redigatur. Ita poſtquam etiam denominatores in ſe ducti creant duodecim, liquet ſex duodecimas eſſe, quæ alioqui ſex integra videri poſſent.

PORRÒ ſi per minutias velis integra multiplicare, aut minutias per integra: ipſum integrorum numerum per minutiarum numeratorem multiplica, & producetur omnium numerator: cui minutiarū denominator nihil immutatus ſub linea ſupponatur. Veluti ſi 2 integra per $\frac{3}{4}$, aut $\frac{3}{4}$ per 2 integra multiplicentur, procreantur $\frac{6}{4}$, quæ faciunt 1 $\frac{1}{2}$. Alij integra ad exemplum minutiarum ita ſcribūt, vt numerus integrorum ſupra breuem lineam notetur, & ſub ea reponatur vnitatis nota, quæ integra illa eſſe ſignificet. iuxta quæ ſic ſcripta, quaſi minutiæ eſſent, veras apponūt minutias, quas in ea ducunt. Deinde numeratorem integrorum per minutiarum numeratorem, harúmque denominatorē per denominatorem illorum multiplicant: qui modus & expeditus eſt, & res ad idem recidit. nam cum ipſa vnitas integra deſignans alios numeros non multiplicet, denominator ſemper inuariatus manet. ita $\frac{2}{1}$ ducta in $\frac{3}{4}$, faciunt $\frac{6}{4}$.

SIC obiter expedita eſt partium duplicatio: quam ſpeciem quidam ſeparatim tractant.

SI AVTEM per minutias voles integra, alijs minutijs adiuncta, multiplicare, vel è conuerſo minutias per integra minutijs adiuncta: reduc prius integra in minutias ſibi adiunctas, ipſa integra multiplicando in illarum denominatorem, numeróque procreato illarum numeratorē addendo. cui numeratori ſic accumulato, minutiarum illarum adiunctarum denominator ſub linea ſubdatur. Deinde ipſæ minutiæ iuxta alteras ſcribantur, numeratórque per numeratorem. & denominator per denominatorem multiplicetur. Puta ſi duo integra cū duabus ſeptimis per duas quartas multiplicanda fuerint, duo in ſeptem ducta creabunt quatuordecim: quibus duo, quæ ſunt in numeratore addita, producent ſexdecim. is erit numerator, cui denominator ſeptē capiens ſub linea iungi

debet. Deinde numerator in alterarum numeratorē ductus creabit triginta duo: denominatoréſque itidem in ſe ducti, producēt viginti octo. ſic 2 integra & $\frac{2}{7}$ reducta creant $\frac{16}{7}$. quæ per $\frac{2}{4}$ multiplicata, componunt $\frac{32}{28}$. Ea vnum integrum faciunt, & $\frac{1}{7}$.

QVANDO integra in integra minutijs adiuncta ducenda ſunt: prius integra minutijs adiuncta in ſociarum minutiarum faciem reducito, ipſa integra in illarum denominationem ducens, numeróque producto numeratorem addens. cui numeratori ſic coacervato, denominator ſub linea ſubdatur. iuxta quas minutias integra minutiarum more, ſupra lineam notentur, ſubiecta his vnitate. Deinde numeratores in numeratores ducantur, itémque denominatores in denominatores, ſicuti fit in minutijs. Veluti ſi 9 in 3 $\frac{4}{5}$ ducēda ſint, 3 in 5 ducta facient 15. quibus addita 4, creāt $\frac{19}{5}$. poſtea 9 in 19 ducta producent 171: quæ ſupra lineā ponantur. Itē ſemel 5 faciūt 5, quæ ſub linea locentur. Ita ex hac multiplicatione fient $\frac{171}{5}$. quæ ſi ad integra libet reducere, creabunt 34 $\frac{1}{5}$.

ATSI integra & minutiæ in integra & minutias duci debent, veluti 3 $\frac{4}{9}$ in 5 $\frac{3}{8}$, vtraque integra prius in minutias ſibi adiūctas redigantur, & poſtea minutiarum more multiplicatio fiat. Itaque in prioribus illis 3 in 9 ducta creant 27. quibus numerator 4 adiūctus producit $\frac{31}{9}$. Similiter in alteris fiat. 5 in 8 ducta faciunt 40. quibus numerator 3 additus, educit $\frac{43}{8}$. Iā verò $\frac{31}{9}$ ductæ in $\frac{43}{8}$ producunt $\frac{1333}{72}$. quæ ad integra reductæ faciunt 18 $\frac{37}{72}$.

VBICVNQVE autem minutiarū minutiæ interueniunt: prius hæ ad ſimplices minutias redigendæ ſunt, & poſtea in ſingulis, ſecundum ea quæ ſuprà dicta ſunt, multiplicatio peragenda.

DE MINVTIARVM PARTITIONE.

PARTIVM diuiſio, eſt duorum fragmentorum, alterius alterum oblique ſecantis, per multiplicationem in vnū coitio, per quam tertium enaſcitur fragmentum, ex vtriuſque illorum æquali complexu generatum. In omni autem partiū diuiſione fragmentum partibus diuiſoris fungens à parte ſiniſtra poni debet, fragmentum verò diuidendum à dextra. quemadmodum fit in integris, vt diuiſor ſiniſtram occupet. Deinde fragmēti diuidendi numerator in diuiſoris denominatorē multiplicetur, & enaſcetur ſectionis numerator. Poſtea denominator diuidendi fragmenti in diuiſoris numeratorem ducatur: & partitionis denominator proueniet. qui ſub numeratore prius procreato, linea in-

teriecta, ſupponi debet. Ita ad hunc modum numeratorum in denominatores, & denominatorũ in numeratores multiplicatio obli que in formam crucis diui Andreæ facta, fragmentum procreabit diuiſoris & diuidendi vim pariter complectens. Exempli gratia. Si per tres ſextas diuidere duas tertias voles, multiplica duo in ſex: & fiunt duodecim, numerator operis. Deinde tria in tria ducantur & procreabuntur nouem, ſectionis denominator. Sic per $\frac{3}{6}$ diuiſæ $\frac{2}{3}$ faciunt $\frac{12}{9}$. quæ, ſi earum numerator per denominatorem ſecetur, integrum vnum & tertiã vnius integri partem conſtituũt.

SVNT qui iubent in minutijs diuidendis, diuiſorem à dextra poni, quaſi id magni referat. qui cur id fieri ſic velint, nihil video, quando illi ipſi præcipiunt fragmenti diuidendi numeratorem in diuiſoris denominatorem, contráque diuidendi denominatorem in numeratorem diuiſoris duci. Quod præceptum ſiquis ſeruet, nihil omnino refert ab vtra parte diuiſor ſteterit: id quod res ipſa ante oculos poſita palàm indicabit, ſi in medio fragmentum diuidendum, atque vtrinque idem fragmentum ſecans ſtatuatur, ad hunc modum $\frac{3}{6} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{6}$ Nam fragmenti medij diuidendi numerator in diuiſoris denominatorem, vel à ſiniſtra, vel à dextra ductus, eundem creat numerum, ſimilitérque diuidendi denominator in numeratorem, vel ſiniſtrum, vel dextrum multiplicatus idẽ faciet. Quamobrem cum in integris diuiſor ſiniſtram teneat: non temere aliud in partibus ſtatuemus, præſertim cum in explicandis difficillimis quibuſque quæſtionibus, in quibus minutiæ interueniunt, hæ, quæ diuiſoris funguntur partibus, ſuapte natura ſiniſtram teneant. id quod in ſequenti libro paſſim cuiuis licebit cernere. Quas minutias, quando ad diuiſionem ventum erit, ſi de ſuo loco in dextram transferes, laborem geminabis.

SI QVAERIS cur ita in minutiarum partitione multiplicatio in formam obliquæ crucis fiat, ratio illa eſt: quòd minutiarum exilitas fit per denominatoris multiplicationem. quanto enim magis ille creſcit, tanto magis hæ comminuuntur, & numero plures fiunt. At è conuerſo numeratoris incrementum vel integra progignit: vel partes multo propiores integris. Itaque cũ minutiarũ inter ſe multiplicatio, ex numeratoris directo in alterũ numeratorẽ ductu, denominatoríſque itidem in alterarum denominatorẽ conſtet, quemadmodum proximo capite edocuimus: minutiarum verò diuiſio, quæ ſuapte natura multiplicationi cõtraria eſt, per multiplicationem fieri etiam ipſa debeat, vt tertiũ his mutua ſectione

coeuntibus fragmentum enaſcatur, quoniam altera illa multiplicatio conficitur directe. hæc,quæ partes ſecat, neceſſe eſt oblique fiat, vt alterarum numerator in alterarum denominatorem,denominatórque alterarum in alterarum numeratorem ducatur.alioqui ſectio nimia redderetur,nec ad æqualitatem res poſſet perduci. Veluti in exemplo iam dato,quando per $\frac{3}{6}$ diuidere $\frac{2}{3}$ voluimus:multiplicantes tria diuidendi denominatorem per tria diuiſoris numeratorem,ſi nihil præterea faceremus,videremur per tria integra partes illas ſecare:atque ita diuidendo, nimium excederemus. Sed quoniam illa tria per quæ diuiſimus,non erant tria integra,ſed erant tres ſextæ, propterea diuidendi numeratorem in ſex diuiſoris denominatorem ducentes, corrigimus exceſſum illum, atque ita partitionem ad æqualitatem reducimus.tãtum enim diuidendi numeratorem ſupplemus,quantum plus iuſto denominatorem eius auximus,partes minuendo.

EN TIBI expeditam partium diuiſionem.quã vt plenius pernoſcas,illud obſeruare oportet,tres earũ ſecandi eſſe ſpecies. Vna eſt,quando partes maiores à minoribus ſecantur. in qua ſpecie naſcuntur minutiæ,quæ plus quàm vnum integrum creant. Exemplum.ſi per $\frac{1}{3}$ ſeces $\frac{1}{2}$, oriuntur $\frac{3}{2}$, quæ vnum integrum & dimidium componunt. Altera,quando æquales partes diuidunt æquales,ex qua vnum creatur integrum.Exẽpli cauſa ſi per $\frac{1}{2}$ diuidas $\frac{1}{2}$,fiunt ex ea ſectione $\frac{2}{2}$: quæ vnum integrũ faciunt. Tertia eſt, vbi partes minores diuiduntur à maioribus:id quod in minutijs ſæpenumero euenit. ſic enim hæ coire poſſunt. In hac partes procreatæ minus reddunt,quàm vnum integrum. Exẽpli gratia.ſi per $\frac{1}{2}$,ſeces $\frac{1}{3}$: prodeunt $\frac{2}{3}$ quæ tertia parte minus, quàm vnũ integrũ edunt. Et vt ſcias quẽ ſenſum afferat minutiarum partitio: primo numerũ aliquẽ inueſtigare oportet,qui vtraſque minutias,tam quæ diuidunt,quàm quæ diuidendæ ſunt, contineat. id quod facile fit,ſi vtrarũque denominatores inter ſe multiplices, deinde in numero illo procreato duos numeros minores exquiras:alterum,qui partes diuidendas:alterum, qui partes diuiſores referat. Ita deprehendes nihil omnino intereſſe vtrum alterum illorũ numerorum per alterum diuidas,an partes alteras per alteras. Exemplum in prima ſecandi ſpecie,vbi per $\frac{1}{3}$ ſecamus $\frac{1}{2}$.ſi numerum quærimus, qui $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{2}$ capiat,tria in duo ducta, ſex nobis creant. qui numerus vtraſque minutias cõplectitur, Poſtea in ſex,prius numerum inueſtigemus qui vnam eorum tertiam expri-

mat. is erit duo. deinde iterum in ſex alterum numerum inquiramus, qui creet vnam eorum ſecundam: & tria eſſe comperiemus. Quibus numeris inuentis, nihil referre deprehendemus, vtrum per $\frac{1}{3}$ ſecemus $\frac{1}{2}$, an tria per duo. Nam vtrobique res ad idem recidet: quippe ex partium ſectione proueniunt tres ſecundæ, quæ vnũ integrũ & dimidiũ faciunt: nam numeratoris per denominatorem partitio vnum in numero partitionis producit, vltra quod vna ſecunda ſupereſt. id quod itidem eueniet ſi tria per duo ſeces. Alterum exemplum in ſecũda ſecandi ſpecie, Si per $\frac{1}{2}$ diuidas $\frac{2}{4}$: inde prodeunt $\frac{4}{4}$, quæ vnum integrum creãt. Idem ſurget ſi quatuor diuidas per quatuor: quippe in octonario numero ex denominatorum in ſe ductu procreato 4 vnam ſecundam, & 4 duas quartas faciunt. At in tertia ſecandi ſpecie, quãdo maiores partes, diuiſoris funguntur partibus, quemadmodũ tunc in integris ſectio fieri nequit, niſi minor numerus vel in ſpecies ſub ſe contentas multiplicetur, vel in minutias ſoluatur, ſicuti mox dicemus: ita dum minutiæ coeuntes ſic ſecantur, huiuſmodi partitio nil niſi minutias parit, quippe quæ vnum integrum nequeunt æquare. quia quot partibus numerator à denominatore ſuperatur, totidẽ deſunt ad integrum componẽdum. Veluti ſi per $\frac{1}{2}$ ſeces $\frac{1}{3}$: prodeunt $\frac{2}{3}$. Quod perinde valet ac ſi duo per tria diuidere moliaris. nam in numero ſenario vtraſque complectente minutias, tria vnam ſecundam, duo vnam tertiam faciunt. Quæ ſectio in integris fieri nequaquã poteſt, vt vterque numerus integer maneat, id quod mox explicabimus. Quamobrem quando partes quælibet per alteras quaſuis partes diuidendæ proponuntur: hoc ſignificatur, vt partes illæ alicuius numeri propoſitæ diuidãtur per alteras eiuſdem numeri partes propoſitas.

PRAETEREA cum in integris multiplicatio ſemper augeat, partitióque diminuat: in minutijs contrà euenit, vt eæ multiplicãdo decreſcant, & augeãtur partiendo. Nam ſi per vnam tertiã vna ſecunda multiplicetur: procreatur vna ſexta, quæ longe minor eſt quàm vel vna ſecunda, vel vna tertia. At è conuerſo, ſi per vnã tertiam vna ſecunda diuidatur: fiunt tres ſecundæ: quæ vnum integrum & dimidium cõponunt, quod longe plus eſt quàm vel vna tertia, vel vna ſecunda. Veruntamen qui minutiarum naturam eã eſſe meminerit, vt quanto magis in numero denominator creſcit, tanto magis quantitate partes diminuantur, id quod antè ſæpius admonuimus: ſtatim mirari deſinet cur minutiæ multiplicãdo de-

creſcant, cum in his numeri incrementum diminutionem afferat quantitatis, & denominator pro ratione magis quàm numerator augeatur. Maius mirum prima facie videri poteſt, quomodo partes diuidendo creſcant: ſed nec id quidem quempiam turbare debet, qui partium diuiſionem ab integrorũ lõge diuerſam eſſe pernouit. Etenim illa fit per ſubductionem diuiſoris à numero diuidendo toties repetitam, quoties id fieri poteſt. Hæc autẽ per duorum fragmentorum obliquam in vnum coitionem, per quam tertium exoritur fragmentum ex æquali illorum complexu productum. Quare quoniã multiplicationis natura eſt vt partes edat minores: partitionis quæ ei contraria eſt, eſſe debet, vt partes inſtauret, plenioréſque eas reddat. Cui rei nõ abſimile quiddam nõnũquã in integris videre licet, ſiquis minutiores nummos ad librarũ aureorúmve ſummã cupiat redigere. id quod fit per ſectionẽ, ſi per illum nummorum numerum, quo libra vna aut aureus vnus æſtimatur, vniuerſus nummorum numerus diuidatur. Itaque quando minutiæ per minutias ſecantur, omnia maiora fiunt, quemadmodum aurei atque libræ congeruntur ex minutioribus nummis. Quocirca partium diuiſio nihil aliud eſt, quàm inueſtigatio quædam quot & quæ partes ex duabus fragmentis ad tertij fragmenti procreationem pariter per ſectionem coeuntibus oriantur.

SIQVAE verò minutiæ per integra fuerint diuidendæ: ab earum ſiniſtra numerus integrorum ſupra lineam ſcribatur, veluti minutiarum numerator quidam, ſub quo, linea interiecta, notetur vnitas: quæ, quaſi quidam denominator, integra deſignet. túmque multiplicatione in formam crucis facta, ſic fiat diuiſio quemadmodum in alijs minutijs. Nam ſi per $\frac{2}{1}$ diuidantur $\frac{3}{4}$: poſtquam in ſpeciem crucis multiplicatio fiet, orientur $\frac{3}{8}$. Alio modo id fieri poteſt, & res ad idem recidet: vt denominatore manẽte intacto, numerator minutiarum per numerum integrorum in partes æquales, ſi fieri poteſt, diuidatur. Veluti ſi per 2 integra $\frac{6}{8}$ ſecentur, fient $\frac{3}{8}$. Alioqui ſi numerator per integrorum numerum in partes æquales ſecari non poſſit, numerus integrorum in denominatorem diuidendi fragmenti multiplicetur, & res erit confecta: ſicuti ſi per 2 integra $\frac{3}{4}$ ſecentur, prouenient $\frac{3}{8}$.

SIC OBITER expedita eſt partium dimidiatio, quam ſpeciem curioſi quidam ſeparatim tractant, cum longe ſit facilior quàm ſi quis eas per tria, quatuor, aut quenuis alium maiorem numerum ſecare velit.

AT SI minutiæ per integra & minutias ſecandæ proponuntur: prius integra in minutias ſibi adiunctas redigantur, vt vna de his minutiarũ facies appareat. quæ, quia diuiſoris partibus fungentur, ſiniſtram occupabunt: aliæ verò minutiæ, quæ ſectionem pati debent, dextram. deinde multiplicatione in formam crucis facta, minutiarum more, diuiſio peragatur. Veluti ſi per $2\frac{1}{2}$ partiri $\frac{3}{4}$ voles: prius adiunctarum minutiarum denominator 2 in 2 ducatur, & fient 4. quibus additus numerator 1, educit $\frac{5}{2}$: per quas ſi ſeces $\frac{3}{4}$, ex ea partitione prouenient $\frac{6}{20}$.

QVÒD SI integra per minutias diuidi debent, integra quidem minutiarum more, ſupra lineam, cui ſubdatur vnitas, à dextra locentur: minutiæ autem à ſiniſtra. Cætera verò quæ de multiplicatione in formam crucis facienda iam diximus: nihil immutentur. Exempli gratia. ſi per $\frac{2}{3}$ ſecare vis $\frac{4}{1}$, enaſcentur $\frac{12}{2}$.

PORRO ſi integra per integra & minutias diuidenda ſunt, poſtquam integra, quæ minutias adiunctas habent, in earum formam redacta erunt, à ſiniſtra locentur, quod diuiſoris fungantur partibus: cætera verò expediantur ſicuti proxime diximus, quãdo integra per minutias ſecantur. Veluti ſi per $2\frac{2}{3}$ ſecandæ ſunt $\frac{4}{1}$, minutiarum adiunctarum denominator 3 ducatur in 2, & fient 6 quibus numerator 2 additus creat $\frac{8}{3}$. per eas autem ſi diuidas $\frac{4}{1}$, inde prouenient $\frac{12}{8}$, quæ faciunt $1\frac{1}{2}$.

AT SI integra & minutiæ per minutias ſecandæ ſunt: prius integra in minutias ſibi adiunctas redigantur, vt vna de his minutiarũ facies fiat. deinde à dextra poſitæ, per alteras minutias fragmẽtorũ more ſecentur. Veluti ſi per $\frac{5}{6}$ partiri $5\frac{3}{4}$ voles: 5 in 4 ducantur, & 20 prodibunt. quibus numeratorem 3 adde, & ſurgent $\frac{23}{4}$. Poſtea multiplica 4 denominatorem diuidendi fragmenti in 5 numeratorem diuiſoris, & producẽtur 20. Deinde numerator diuidendi 23 ducatur in denominatorem diuiſoris 6, & ſurgent 138. quæ ſi per 20 ſecta ad integra redigantur, proferent $6\frac{9}{10}$.

AD EVNDEM modum fiat ſi integra & minutiæ per integra ſecandæ ſunt. id quod quando acciderit, ipſa integra à ſiniſtra locata minutiarum ſpeciem induant, vti ſuprà dictum eſt.

QVANDO verò integra & minutiæ per integra & minutias diuidi debent, prius vtraque integra in minutias ſibi adiunctas ſeorſum redigantur, vt omnia minutiarum ſpeciem vtrinque referant. Deinde minutiæ quæ diuidendæ ſunt, à dextra locatæ, per alteras, fragmentorum more ſecẽtur. Veluti ſi per $3\frac{2}{9}$ partiri $6\frac{1}{7}$ cupis: 3

in 9 multiplicata,& producto numerator additus,facient $\frac{29}{9}$. Itē 6 in 7 ducta,productóque numerator adiunctus proferent $\frac{43}{7}$. Poſtea ſi per $\frac{29}{9}$ ſecētur $\frac{43}{7}$, ex ea partitione $\frac{387}{203}$ prodibunt. quæ ad integra reductæ faciunt $1\frac{184}{203}$.

VBICVNQVE autē minutiarū minutiæ interueniunt, prius hæ ad ſimplices minutias redigendæ ſunt, & poſtea in ſingulis, ſecundum ea quæ ſuprà dicta ſunt,diuiſio peragenda.

SI CAPERE experimentum libet an partitio recte facta ſit, ſectionis numerum in diuiſorem multiplica,& numerus diuidendus producetur. nam multiplicatio diuiſionem, & multiplicationem diuiſio probat in minutijs,quemadmodū fit in integris.Igitur quando per $\frac{1}{3}$ ſecantes $\frac{1}{2}$ educimus $\frac{3}{2}$, quæ faciunt $1\frac{1}{2}$: recte diuiſum eſſe probabimus, ſi $\frac{3}{2}$ in diuiſorem $\frac{1}{3}$ ducemus.ita $\frac{3}{6}$ producentur,quæ ad minimam nomenclaturam redactæ faciūt $\frac{1}{2}$. quod fragmentum diuidendum erat.

IN MINVTIIS operæpretium illud admonere putauimus, in quo multum exercitatos labi ſæpenumero vidimus, Quandocunque minutiæ quæ diuiſoris funguntur partibus, & quæ ſunt diuidendæ, eundem denominatorem habent, qui in vtriſque ſuo numeratore minor reperitur,maiórque exiſtit earum numerator quæ ſecandæ ſunt, quàm quæ ſecare debent: quoniam tunc in vtriſque, minutiæ totidem integra repræſentant quoties vtriuſque numerator denominatorem ſuum continet, partitio nequaquam oblique in formam crucis fiat, ſicuti fit in minutijs, ſed denominatoribus manentibus intactis, maior diuidendi numerator per diuiſoris numeratorem, qui minor eſt,integrorum more ſecetur.Alioqui ſi ſupputator illas ſicut minutias diuideret incautus,cum integra deſinent, & minor numerator maiorē partiri poſſit,in labyrinthum inextricabilem ignorans ſeſe immergeret. Exemplis rem illuſtremus. Eſto per $\frac{5}{3}$ ſecandæ eſſent $\frac{7}{3}$, denominatoribus vtriuſque nihil immutatis, ſeptem per 5 diuiſa educent vnum integrum & duas quintas. Aut ſi per $\frac{8}{6}$ partiri cupias $\frac{10}{6}$,per octo ſecans decem,vnum integrum procreabis: & ſupererunt $\frac{2}{8}$, quæ reddunt $\frac{1}{4}$.

Et quanuis in his exemplis nihil referre videatur vtro ea modo ſecentur,cum etiam ſi minutiarum more fieret partitio,nihilominus poſt reductionē minutiarū ad integra res ad idē recideret: tamē præterquam quòd via iā monſtrata illas reducendi vitat ambages, multæ ſupputationes occurrent in quibus error immenſus

orietur,ſi ritu partium ea diuidas. Et præſertim vbi ex diuerſis integris, & varijs minutijs in vnum additis, vnus omnium diuiſor colligitur, qui multa & varia ſecare debeat. Id quod in explicandis numerorum nodis, in ſequenti libro manifeſtum per exempla faciemus.

IN INTEGRIS numeris maior non diuidit minorem: cum in minore maior non cõtineatur: vti ſuperiori libro, de partitione præcipientes, admonuimus. Cæterum maior numerus minorem frangere in minutias poteſt. Et vt ſcias quonam modo ea ſectio fiat, quótque & quales partes faciat: illud obſerua, vt minorem numerum diuidendum ſupra breuem lineam ductam, numeratorem ſtatuas: maiorem verò qui diuiſor eſt, denominatorem lineæ ſubijcias. ſic tot enaſcentur partes, quot diuidẽdus, qui numerator eſt, vnitates capit. tales autem erunt, quales denominator, qui diuiſor eſt, demonſtrabit. Quæ continuo ad minimam ſui nomenclaturam redactæ manifeſtabunt quot & quales partes prodeant, quan do maior numerus in minutias diuidit minorẽ. Exemplum, Si per 30 ſecare 15 velimus, fiunt $\frac{15}{30}$. quæ ad minimam nomenclaturam redactæ faciunt $\frac{1}{2}$. Itidem ſi per 40 partiri cupiamus 15, ſectio facit $\frac{15}{40}$, quæ ſunt $\frac{3}{8}$. Similiter ſi per 13 ſecare velimus 7, prodeunt $\frac{7}{13}$. Minor numerus ſupra lineã numerator efficitur, quòd in minutijs is locus ſit numeri diuidendi. maior verò numerus ſub linea denominator fit: quòd eum locum in minutijs diuiſor obtineat. Et quemadmodũ ſi numerator maior eſſet, denominator minor eum ſecans proferret integra: ſic è conuerſo, quando denominator numeratore maior eſt, enaſcuntur minutiæ: quibus tantum deeſt ad integrum componendum, quanto numerator denominatore eſt minor. Ita numerus minor diuidi per maiorẽ duobus modis poteſt. vel quando res à minore numero numeratæ ducuntur in ſpecies ſub ſe contentas: vt numerus productus maioris ſectionem ferat. veluti ſi vnus aureus inter quatuor viros diuidendus, multiplicetur in minutiorẽ pecuniam, vt in quatuor partes diſtribui poſſit. vel quando numerus maior minorẽ in minutias ſecat: id quod fieri poteſt eo modo quo iam diximus. Hæc quanquam attinent ad ſectionem integrorum, quia tamen huiuſmodi partitio producit minutias, de quibus ibi præpoſtere fuiſſet dicendum, in hunc locum potius releganda fuerunt.

DE RADICVM INVESTIGATIONE IN MINVTIIS.

QVADRATI & cubi lateris inueſtigatio eodem modo fit in minutijs quo in integris fieri ſolet, niſi quòd geminandus eſt labor, cum tam in numeratore quàm in denominatore radix ſit quærenda. Latus autem in numeratore inuentum numeratoris erit radix. quod verò ex denominatore eruetur, denominatoris radix habebitur. inter quæ, linea media ſecanda eſt. Exēplum de latere minutiarū quadrato. Si de $\frac{25}{16}$ radicem cupis eruere, numeratoris radicem inuenies 5, denominatoris 4. Sic linea diſtinguente, fiunt $\frac{5}{4}$. Similiter de $\frac{46}{64}$ radix quadrata capit $\frac{6}{9}$, & reliquæ ſuperſunt $\frac{10}{13}$. Radix verò cubica earundem minutiarum habet $\frac{3}{4}$, & reſtant $\frac{19}{30}$.

DE RADICIBVS PROPIVS INVENIENDIS IN NVmeris neque quadratis neque cubis.

VBI IN numero, qui neque quadratus eſt, neque cubus, radix eſt inuenta, ſemper aliquid erit reliquum, ſiue in prima inueſtigatione id eueniat, ſiue in vlteriore: de qua iam dicemus. Nam ſi nihil reſtaret, is numerus, quadratus, aut cubus eſſet. Nonnunquam autem in amplo numero reliquum ipſum ingens erit. Prima nanque inueſtigatio radicem deprehendit maximi numeri quadrati, aut cubi in his contenti: inter quem & numerum illum, qui neque quadratus, neque cubus proponitur, ipſum reliquum differentiam manifeſtat. Quocirca in eiuſmodi numeris veram radicem aſſequi nunquam licet: tametſi propius multo, quàm in prima inueſtigatione factum eſt, accedi poteſt: vt ſcias quot partes cuiuſuis denominationis ſuperſint. Id quod in quadratis fiet ad hunc modum.

POST primam in integris radicis exquiſitionem, in qua reliquum ſupereſt: numerum illum non quadratum, cuius in integris radix inuenta eſt, per denominatorem cuiuſcunque partis, quam optas, multiplica. Deinde per eundē denominatorem iterum multiplica numerum productum. Quod cum factum erit, radicem numeri per ſecundam multiplicationem producti, exquire. Hæc nanque radix ſecunda cunctas illius denominationis partes in numeri primò propoſiti radice contentas demonſtrabit. Atque ideo ſi per partium denominatorem radicem illam ſecundam ſeces: nu-

merus ſectionis proferet primæ radicis integra : & præterea etiam partes aliquot illius denominationis. Cæterum aliquot minutiæ ſemper reſtabunt, quæ minus quàm vnā partem faciant: vt ad integrum formandum partes illæ nunquam deduci queant.

VERBI gratia, ſi ſcire libet quæ ſit radix numeri octonarij: hāc eſſe 2 deprehēdes, & quatuor erunt reliqua. Iam ſi ſcire velis quot quartæ vnius integri ſuperſint in radice: Primum 8 per quatuor multiplica, & prodeunt triginta duo. Iterum triginta duo in quatuor ducito, & producentur 128. Huius ſecundo producti radicem perſcrutans comperies eam 11. totidem nāque quartæ ſunt in octonarij numeri radice, hoc eſt, duo integra, & tres quartæ, præter ſeptem in minutijs reliqua, quæ quartam explere nequeunt. Itaque vltra primam inueſtigationem, quæ 2 integra in radice protulit, ſecunda tres præterea quartas eruens propius acceſſit.

QVÒD SI etiamnum partium particulas inueſtigare pergens ſcire velis quot quartæ vnius partis quartæ, vltra duo integra & tres quartas ſuperſint: ad eundem modum, ſicut de integrorū partibus exquirendis iam dictum eſt, numerum, cuius radicem ſecundo indagaſti, ſemel in denominatorem particulæ, & iterum in productum ducere debes: atque in numero ſecundo producto radicē inueſtigare. quæ poſtquam inuenta erit, cunctas illius denominationis partium particulas in numeri primo propoſiti radice contentas demonſtrabit. Illam autem radicem ſi per denominatorem particularum ſeces, numerus ſectionis partes integrorum demonſtrabit: & id quod erit reliquum, partium particulas.

VERBI gratia, 128, cuius numeri in ſuperiori exemplo ſecūdo producti radicē inueſtigauimus, per quatuor multiplicemus: inde naſcētur 512. Poſtea iterum ducamus quatuor in 512: ita producentur 2048. huius numeri radicem quærentes deprehendemus eam eſſe 45: & ſuperſunt 23. Igitur 45 quartæ vnius partis quartæ in octonarij radice erunt: quas ſi diuidamus per quatuor numeros partitionis, mōſtrabit 11, & vnum erit reliquum. Qua ratione comperiemus in octonarij radice vndecim partes quartas, nempe duo integra & tres quartas, atque inſuper vnam quartam vnius partis quartæ cōtineri. Quòd ſi cui eſt animus amplius progredi: poterit ad eundem modum etiam particularum particulas vlteriores perſcrutari.

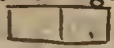
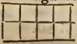
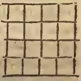
IN CVBIS quoque numeris ad eundem omnino modum omnia fiant. niſi quòd numerū illum non cubum, cuius radix in

integris inuenta eſt,non ſolum per denominatorem partis,quamcunque voles,multiplicare oportet, & iterum in productum:ſed (vt ratio cuborum poſtulat) tertio denominatorem illum in numerum ex ſecunda multiplicatione productum ducere debemus. Quo fiet vt numeri tertio producti radix inueſtigata cūctas illius denominationis partes in primi cubi radice cōtentas manifeſtet. Itidem etiam progredi licet ad partium particulas in his inueſtigandas.

ALIO MODO per compendium id fieri poterit,ad hunc modum,vt denominatorem partium quas exquiris,ſemel in reliquū, quod poſt primam in integris radicis exquiſitionem reſtabit, atque iterum in productum ducas. Poſtea per eundem partium denominatorem radicem ipſam in integris inuentā multiplica, numerúmque illum partium radicis ſic productum duplica. Deinde numerum qui ex denominationis partium ſemel in radicis reliquum,atque iterum in productum multiplicatione productus eſt, ſic diuidere per numerum ex duplicatione generatum debes, vt tamen tantum ſuperſit, quantum numerus ſectionis poſtea in ſeipſum ductus,propemodum delere ſubductus poſſit. Nā in his numeris non quadratis ſemper (vti diximus) aliquot minutiæ reſtabunt.Ita numerus ſectionis radicis partes ex reliquo naſcentes monſtrabit. Verbi gratia, Si ex octonario radicem quæris: inuenies eam 2, & ſuperſunt quatuor. Iam ſi ſcire cupis quot quartæ ſint in reliquo,multiplica quatuor reliquum per quatuor denominatorem partium quas quæris: & prodeunt ſedecim. Iterū denominator quatuor in ſedecim ductus creat ſexaginta quatuor. Deinde radicem 2 multiplica in denominatorem partium quatuor,& fient 8. duplica productum 8,& procreantur ſedecim.Iam verò ſi diuidas ſexaginta quatuor per ſedecim,quater in illis diuiſor haberi poteſt,ſed tunc nihil reſtabit quod numerus partitionis poſtea in ſe ductus deleat.quare ſi ſemel minus,quàm alioqui fieri poſſet, diuiſorem ſedecim tollamus, ter ſedecim facient quadraginta octo:& ſupererunt adhuc ſedecim:à quibus ſi numerum ſectionis 3 in ſe ductum,qui facit nouem,ſubducas, reſtant ſeptē.ſic numerus ſectionis oſtēdit,ex reliquo radicis fieri tres quartas,præter minutias reſtantes 7.

ATSI IN hoc exemplo partium particulas inueſtigare perges, veluti quartarum quartas: denominatorem particularum, quas quæris,nempe quatuor ſemel in reliquum poſt ſecundam radicem

partium inuentam reſtans, videlicet ſeptem ducito: indéque fient viginti octo. Iterũ etiam eundem denominatorẽ quatuor in productum viginti octo multiplicato:& ſurgent 112. Poſtea eatũdem particularum denominatorem quatuor ducere oportet in omnes partes totius radicis hactenus inuentas, quæ ſunt vndecim: nam duo integra quæ prodierũt ex prima inueſtigatione, & tres quartæ quæ ex ſecunda, faciunt vndecim quartas. quo fiet, vt quatuor in vndecim ducta procreent quadraginta quatuor: quem numerum productum ſi duplices, naſcentur octoginta octo. Per ea autem ſi ſic diuidas 112, vt numerus ſectionis poſtea in ſeipſum ductus, quoad fieri poteſt, totum diuidendum auferat, vnitas diuiſor ſufficiet: ita octoginta octo ſemel à 112 extracta, relinquunt viginti quatuor: & poſtea vnitas in ſe ducta adhuc vnum creat: quod auferendum eſt à 24,& reſtabunt viginti tria. Ita numerus ſectionis vnam quartã vnius quartæ ex ſecundo reliquo prodire manifeſtat:& ſuperſunt 23. Hac ratione etiam vlteriores particularum particulas, quatenus progredi velis, conſectari licet.

RATIONEM verò cur quadratum per denominatorem partium bis ſit multiplicandum, Socrates apud Platonem Menonis puero reddit. Cuius ſentẽtiam paucis explicabo. Quadratũ lineæ bipedalis quatuor erit pedum: nã cum figura duos pedes longa & vnum alta, duorum ſit pedum,  fit vt figura duos pedes longa & itidem duos alta, quatuor pedum exiſtat.  Quadratum autem duplæ longitudinis ſedecim capiet pedes. quoniam cum figura longitudine dupla & ſola duorum pedum altitudine pedes octo complectatur,  figura, quæ longitudinis duplæ, & altitudinis etiã duplæ erit, ſedecim pedes capiet. 

SIMILITER in omnibus alijs quadratis multiplicandis opus eſt duplici multiplicatione: quoniam prima multiplicatio ſolum auget in longitudinem: at ſecunda quæ fit in productum, altitudini tantundem adijcit. Exempli cauſa, Eſto quadratum propoſitũ quatuor. ſi libet inquirere quadratum, cuius quodque latus duplũ ſit ad quodque latus propoſiti quadrati: duplica quadratum propoſitum: inde octo naſcuntur, & tantum figura creuit in longitudinem. Longitudo enim dupla euaſit, ſed altitudo inuariata ma-

net. igitur quadratum non eſt. Quare ſi iterum duplices productum: inde fient ſedecim. atque ita tantundem etiam in altitudinem creſcet, cum ſit dupla ad altitudinem priorem. Quod autem Socrates in lineis puero ſub oculis demonſtrauit, id Euclides in numeris, qui formari poſſunt in modum quadratorum, doctis ratione patefacit, cum inquit, Si fuerint duo numeri, ambo quadrati, erit proportio alterius ad alterum, tanquam ſui lateris ad latus illius, proportio duplicata. Si verò ambo fuerint cubi, erit proportio alterius ad alterum, tanquam ſui lateris ad latus illius, proportio triplicata.

QVÒD ſi compendij dati rationem quæris, id ita habere ſub oculis videre licebit, hoc exemplo. Finge numerum propoſitum eſſe tria, huius radicem conſtat eſſe vnum, & ſuperſunt duo. Iam ſi ſcire libet quot quartæ vnius integri ad illa duo reſpondere debeant, duc denominatorem quatuor in tria, & fient duodecim. Iterum multiplica quatuor in productũ duodecim, inde naſcentur quadraginta octo. Huius numeri figuram quadratam efforma, hoc modo.

1	1	1	1	1	1	
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

IN HAC figura ſedecim reſpondent ad maximum quadratum, ſub primo numero 3. nam ex ductu quatuor in vnum, & iterum in productum, fient ſedecim. Itaque hoc quadratum reſecabis, cuius radix nota 4 (quia naſcitur ex ductu radicis integrorum in denominatorem partium) ad radicem vnum in integris prius inuentam reſpondet. Quod ſupereſt autem, reſpondet ad reliquũ numeri primo propoſiti: quippe quod naſcitur ex ductu denominatoris partium quatuor in reliquum 2, & iterum in productum octo, ex quo procreantur triginta duo. Ex illis autem triginta duobus, quæ vltra quadratum, quod eſt ſedecim, ſuperſunt: duodecim illa, quæ gnomonem extremum non abſoluunt (voco autem in numeris gnomonem, id quod conſtat ex duobus numerorum lateribus angulum rectum facientibus, inſtar gnomonis geometrici) veluti reliquũ maximi quadrati triginta ſex ſub quadraginta octo reſecanda ſunt. Ita reſtant gnomones duo, qui cum quadrato ſedecim quod reſecuimus, conficiunt maximũ quadratum 36 ſub 48 contentum: adijciúntque radici ſuperiori quatuor, quæ ad radicem vnum in integris inuentam reſpondet, duas vnitates: vti in figura liquet. & reliquum huius quadrati triginta ſex,

quod eſt 12, adieciſſet tertiam, ſi modo ad gnomonem abſoluendum, vnũ inſuper acceſſiſſet. Itaque ante oculos cernere licet, gnomonem quenque quadrato reſecato applicatum, in ſe complecti longitudinem & altitudinem ipſius quadrati ſedecim, hoc eſt duplum radicis quatuor: & inſuper in angulo reſtare quadratum numeri gnomonum: is eſt in hoc exemplo binarius. ſunt enim duo gnomones. Quare diuiſio numeri procreati ex ductu denominatoris in reliquum & iterum in productum, facta per duplum radicis, ſic tamen vt numerus ſectionis in ſe ductus ſubduci poſſit à reliquo partitionis, oſtendet quot ſint gnomones. Quo fiet vt liqueat quot partes ad reliquum reſpondentes, addendæ ſint radici prius in integris inuentæ. nam ei gnomo quiſque vnitatem in partibus addit.

AD EXERCENDOS iuuenes plurimum iuuabit nonnullas interrogationes ſubnectere, per quas ea, quæ de minutiarum inter ſe comparata magnitudine dignoſcendo, déque integrorum & minutiarum additione, ſubductione, multiplicatione, & diuiſione hactenus dicta ſunt, melius intelligantur. Sunt in his quoque quædam, quæ ad enarrationem partium quotarum in numeris & in minutijs, atque etiam ad partium aliarum in alias tranſformationem faciunt. Ea autẽ rudimenta ex Arithmetica Lucæ de Burgo, cuius nomen in ea arte nõ parum, neque abs re celebratur, excerpſimus: quæ ſanè ad ingenia ſtudioſorum in numeris vegetanda magnopere conducent. fr lucas de Bu

Quomodo, propoſitis binis minutijs, ſcias vtræ ſunt maiores.

SI QVINQVE ſextæ conferantur cum tribus quartis: vtræ maiores erunt? Continuo ſcies, ſi vtriſque minutijs iuxta alteras notatis, numeratorum in denominatores, denominatorúmque in numeratores, obliqua multiplicatio fiat, & vterque numerus productus ſupra ſuas minutias locetur. Quippe vtercunque illorum maior erit, maiores ſuas minutias oſtendet. Hac ratione $\frac{5}{6}$ maiores ſunt, quàm $\frac{3}{4}$. nam ſupra $\frac{5}{6}$, 20 erunt: ſupra $\frac{3}{4}$, 18. At vbi integra & minutiæ cum alijs integris & minutijs conferentur: ſi integra erunt paria, de minutijs ſolis iudicãdum erit, vti ſuprà dictum eſt. Quòd ſi integra altera alteris imparia occurrant, quæ maiora ſunt, vincunt altera quantunuis magnas minutias adiunctas habentia.

$$\overset{20}{\frac{5}{6}} \times \overset{18}{\frac{3}{4}}$$

Interrogationes per Additionem ſoluendæ.

A QVO numero ſubduci debẽt 13, vt reſtent 12? Item à quo numero ſubtrahẽtur $3\frac{1}{2}$, vt relinquantur $4\frac{1}{3}$? Huius generis interrogationes, ſiue de integris, ſiue de minutijs quæras, per additionẽ ſoluũtur. Nã ſi 12 ad 13 addas, ſurgẽt 25, quæ ſũma eſt vnde illa 13 eximi debẽt, vt reſtent 12. Similiter in minutijs, adde $3\frac{1}{2}$ ad $4\frac{1}{3}$, & fient $7\frac{5}{6}$, vnde ſubduci debent illa $3\frac{1}{3}$, vt $4\frac{1}{3}$ relinquantur.

Interrogationes per Subductionem ſoluendæ.

CVM QVO numero coniungenda ſunt 23, vt fiant 39? Item cum quo numero copulanda ſunt $6\frac{2}{3}$, vt fiant $13\frac{2}{5}$? Huiuſmodi quæſita per ſubductionem ſoluuntur. Nam ſi 23 à 39 ſubducas, reſtabunt 16: quæ iuncta ad 23 faciunt 39. Similiter in minutijs, ſubducito $6\frac{2}{3}$ à $13\frac{2}{5}$, & ſupererũt $6\frac{11}{15}$. quæ ſi iũgas ad $6\frac{2}{3}$, ſurgẽt $13\frac{2}{5}$.

SI QVAERIS quantum $\frac{2}{5}$ ſuperant $\frac{3}{7}$: per ſubductionem ſcies. Nam poſtquã eo modo, quo dictum eſt deprehendiſti $\frac{3}{7}$ maiores eſſe, quàm $\frac{2}{5}$: alteras ab alteris ſubducito, & $\frac{1}{35}$ reſtabit: quæ differẽtiã inter has minutias mõſtrabit. Id probare licet ſicut in ſubductione. nã ſi $\frac{1}{35}$ addas ad $\frac{2}{5}$, fiet ſumma æqualis ad $\frac{3}{7}$. Itidẽ ſi quæratur quæ ſit differentia inter $\frac{2}{5}$ & $\frac{3}{7}$: eodem modo ſcire licet.

Interrogationes per Multiplicationem ſoluendæ.

QVIS numerus in 5 diuiſus erat, quãdo in numero ſectionis 17 habentur? Item quis numerus in $4\frac{1}{7}$ diuiſus erat, quando numerus ſectionis profert $2\frac{1}{8}$? Multiplicatio rem aperiet. Nã ſi 5 in 17 ducas, fient 85: qui numerus in 5 ſectus educit in numero ſectionis 17. itidem in minutijs $4\frac{1}{7}$ ducta in $2\frac{1}{8}$, faciẽt $8\frac{45}{56}$. Is numerus in $4\frac{1}{7}$ ſectus, in numero partitionis reddit $2\frac{1}{8}$.

Quomodo partium particulæ ſunt exquirendæ.

QVOMODO exquiras $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$, aut $\frac{3}{7}$ de $\frac{8}{9}$? Hoc perinde eſt acſi quæras quæ ſunt $\frac{2}{3}$ quatuor quintarum, aut $\frac{3}{7}$ octo nonarum. Igitur huiuſmodi quæſita, quæ de minutiarum minutijs occurrunt, per multiplicationem minutiarum alterarum per alteras expediuntur. Nam $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$ ſunt $\frac{8}{15}$. Item $\frac{3}{7}$ de $\frac{8}{9}$ ſunt $\frac{24}{63}$. quæ ad minimam nomenclaturam redactæ faciunt $\frac{8}{21}$.

QVAE ſunt $\frac{3}{4}$ de $2\frac{1}{2}$? Interrogatio hæc, niſi quòd integra minutijs ſunt admixta, præcedenti ſimilis eſt. Quocirca per multiplicationem ſimili modo ſoluitur. Nam $\frac{3}{4}$ de $2\frac{1}{2}$ ſunt $1\frac{7}{8}$.

Interrogationes per Diuiſionem ſoluendæ.

PER QVEM numerũ diuiſa ſunt 36, quãdo 9 prodierunt in numero ſectionis? Item per quem numerum diuiſa ſunt $12\frac{1}{4}$, quãdo numerus partitionis habet $3\frac{1}{2}$? Huiuſmodi interrogationes per ſectionem ſoluuntur, Quippe 36 per 9 ſecta, monſtrant 4 in numero partitionis. Nam quando duo numeri aliquem componunt, ſi is per illorum alterum ſecetur, alter in numero partitionis exit. Ita cum quater 9 faciunt 36: ſi numerum illum compoſitum ſeces per 9, exeunt 4: ſi per 4, exeunt 9. Similiter $12\frac{1}{4}$ per $3\frac{1}{2}$ diuiſa, educunt $3\frac{1}{2}$ in numero partitionis.

PER QVEM numerum multiplicare oportet $2\frac{1}{2}$, vt $7\frac{2}{3}$ producantur? Hoc genus interrogationũ per diuiſionẽ explicatur. Nam ſi per $2\frac{1}{2}$ ſeces $7\frac{2}{3}$, ex ea partitione prouenient $3\frac{1}{15}$. Is eſt numerus, in quem ſi $2\frac{1}{2}$ ducas, producentur $7\frac{2}{3}$.

Quomodo exquiras in numeris, quota pars maioris numeri ſit minor: & in minutijs, quota pars maiorum minutiarum minores exiſtant.

QVOTA pars ſunt 4 de 12, aut $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$? Hoc facile ſciri poteſt tam in integris, quàm in minutijs, ſi id quod minus eſt, per maius in minutias eo modo diuidas, quo de vtriſque ſuprà dictum eſt. Nam ſi 4 per 12 ſeces, fient $\frac{4}{12}$, quæ ſunt $\frac{1}{3}$ de 12. Et ſi per $\frac{3}{4}$ diuidas $\frac{2}{3}$, prodibunt $\frac{8}{9}$. Igitur dicam $\frac{2}{3}$ eſſe $\frac{8}{9}$ de $\frac{3}{4}$. Idque ita eſſe vel ex hoc capere experimentum licet, quòd ſi ſumas $\frac{8}{9}$ de $\frac{3}{4}$, id quod alteras minutias in alteras ducendo facere licet, inuenies eas eſſe $\frac{2}{3}$.

Minutiarum aliarum in alias tranſformatio.

QVOT decimæ octauæ ſunt in $\frac{5}{9}$? Hoc genus vocant minutiarum aliarum in alias tranſformationem: id quod fit per partitionem. Nam ſi per $\frac{1}{18}$ diuidas $\frac{5}{9}$, ex ea ſectione prouenient $\frac{10}{18}$, quæ ſunt $\frac{5}{9}$. ſic in $\frac{5}{9}$ comperiuntur $\frac{10}{18}$. Eodem modo quælibet aliæ minutiæ in alias quaſlibet per ſectionem transfigurãtur, etiam ſi integra ſunt adiuncta. Veluti ſi quæratur quot tertiæ ſint in $3\frac{1}{2}$. per $\frac{1}{3}$ diuide $3\frac{1}{2}$, & prouenient $10\frac{1}{2}$. tot ſunt tertiæ in $3\frac{1}{2}$. Hunc modum partes alias in alias tranſformandi, ſuprà etiam dedimus, quando de partibus diſſimilibus ad ſimilitudinem redigẽdis præcepimus: quanquam ibi de minutiarum ſectione, quæ nõdum explicata erat, de induſtria reticuimus.

Interrogationes per plura & diuerſa ſoluendæ.

CVM quot octauis ſupputari debēt $\frac{3}{5}$, vt fiant $\frac{8}{9}$? Principio cōſydera cum quo numero iungendæ ſunt $\frac{3}{5}$, vt ſurgant $\frac{8}{9}$, id quod per ſubductionem ſcies. Nam ſi ſubducas $\frac{3}{5}$ ab $\frac{8}{9}$, reſtabunt $\frac{13}{45}$. cū eo numero copulanda ſunt $\frac{3}{5}$, vt fiant $\frac{8}{9}$. Iam verò videndum eſt quot octauas $\frac{13}{45}$ capient. id quod ſcies ſi per $\frac{1}{8}$ ſeces $\frac{13}{45}$: ſic in numero ſectionis prodibunt $2\frac{14}{45}$. cum tot igitur octauis, hoc eſt cū duabus & $\frac{14}{45}$ vnius octauæ, copulandæ ſunt $\frac{3}{5}$, vt ſurgant $\frac{8}{9}$. Eodem modo de ſimilibus fiat.

SVBTRAHANTVR $\frac{3}{5}$ à tot ſeptimis, vt $\frac{1}{2}$ ſuperſit. Principio videndū à quo opus eſt ſubducere $\frac{3}{5}$, vt $\frac{1}{2}$ reſtet: id quod deprehēdes, ſi $\frac{3}{5}$ ad $\frac{1}{2}$ addas: ita ſurgēt $1\frac{1}{10}$. à quibus demere oportet $\frac{3}{5}$, vt $\frac{1}{2}$ relinquatur. Deinde vide quot ſeptimæ ſunt in $1\frac{1}{10}$: id quod ſcies, ſi per $\frac{1}{7}$ ſeces $1\frac{1}{10}$. ita ſurgent $7\frac{7}{10}$, quæ ſunt 7 ſeptimæ & $\frac{7}{10}$ vnius ſeptimæ. de tot ſeptimis ſubducere oportet $\frac{3}{5}$, vt $\frac{1}{2}$ ſuperſit. Id ita eſſe probabis, ſi capias 7 ſeptimas, quæ ſunt vnum integrū: poſtea ſumas 7 decimas vnius ſeptimæ, quæ ſunt $\frac{7}{70}$, & faciūt $\frac{1}{10}$. Sic in ſumma fiunt $1\frac{1}{10}$, ſicuti iam dictum eſt. Similiter fiat in huiuſmodi quæſitis.

SVBDVCATVR differentia quæ eſt inter $\frac{2}{5}$ & $\frac{5}{6}$ de tali numero, vt reſtet differentia quæ eſt inter $\frac{1}{2}$ & $\frac{5}{9}$. Primum per ſubductionem exquirenda eſt differentia inter $\frac{2}{5}$ & $\frac{5}{6}$, ea eſt $\frac{13}{30}$. Deinde eodem modo quære differentiam inter $\frac{1}{2}$ & $\frac{5}{9}$, & eam inuenies $\frac{1}{18}$. Poſtea ambas eas differentias adde, & ſurgent $\frac{22}{45}$, à quo numero fiat ſubductio primæ differentiæ, videlicet $\frac{13}{30}$, & altera differentia, quæ quæſita eſt, reſtabit.

PER quot quintas multiplicāda ſunt $2\frac{1}{2}$, vt inde creſcant $7\frac{2}{3}$? Primū vide per quē numerū opus eſt multiplicare $2\frac{1}{2}$, vt fiāt $7\frac{2}{3}$: id quod ſcies, ſi per $2\frac{1}{2}$ diuidas $7\frac{2}{3}$. ita exibunt $3\frac{1}{15}$: in quæ ſi $2\frac{1}{2}$ ducas, produces $7\frac{2}{3}$. Deinde videndum quot ſunt quintæ in $3\frac{1}{15}$. id quod facile cognoſci poteſt, ſi per $\frac{1}{5}$ ſeces $3\frac{1}{15}$. Nam inde prouenient $15\frac{1}{3}$, quæ ſunt 15 quintæ & $\frac{1}{3}$ vnius quintæ. per tot quintas multiplicanda ſunt $2\frac{1}{2}$, vt fiant $7\frac{2}{3}$.

SVMANTVR $\frac{2}{3}$ de tot octauis, vt $\frac{1}{2}$ inde proueniat. Hoc tantum valet ac ſi dicas, $\frac{1}{2}$ cuius numeri faciet $\frac{2}{3}$? vel per quē numerum multiplicāda ſunt $\frac{2}{3}$, vt fiat $\frac{1}{2}$? Sicuti ſuprà edoctus es, per $\frac{2}{3}$ diuide $\frac{1}{2}$: & proueniēt $\frac{3}{4}$. Huius numeri $\frac{1}{2}$ faciet $\frac{2}{3}$. Nam $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$ ſunt $\frac{1}{2}$. Iam verò vt ſcias in $\frac{3}{4}$ quot ſunt octauæ, ſi per $\frac{1}{8}$ ſeces $\frac{3}{4}$, prouenient 6. Itaque de $\frac{6}{8}$ ſumendæ ſunt $\frac{2}{3}$, vt fiat $\frac{1}{2}$.

DIVIDANTVR $7\frac{1}{2}$ per tot, vt inde proueniant $\frac{5}{6}$ de $17\frac{1}{2}$. Principio ſumendæ ſunt $\frac{5}{6}$ de $17\frac{1}{2}$ eo modo quo dictum eſt, eæ ſunt $14\frac{7}{12}$. Is numerus partitionis illius eſſe debet. Poſtea videndũ per quem numerũ ſecandæ ſunt $7\frac{1}{2}$, vt inde proueniant $14\frac{7}{12}$. id quod fiet, ſicut ſuprà dictum eſt, ſi per $14\frac{7}{12}$ diuidas $7\frac{1}{2}$: ita exibunt $\frac{90}{175}$, quæ ſunt $\frac{18}{35}$: per quæ diuidere oportet $7\frac{1}{2}$, vt inde proueniant $14\frac{7}{12}$, hoc eſt $\frac{5}{6}$ de $17\frac{1}{2}$.

DIVIDANTVR $7\frac{1}{2}$ per tot nonas, vt inde proueniãt $2\frac{1}{4}$. Primo vidẽdum per quem numerum ſecanda ſunt $7\frac{1}{2}$, vt inde proueniant $2\frac{1}{4}$. id quod ſcies, ſi per $2\frac{1}{4}$ ſeces $7\frac{1}{2}$: ita prouenient $3\frac{1}{3}$. per eum numerum diuidere oportet $7\frac{1}{2}$, vt exeant $2\frac{1}{4}$. Iam verò quot nonæ ſunt in $3\frac{1}{3}$, cognoſces ſi ea per $\frac{1}{9}$ diuidas, prouenient enim 30. Itaq; per 30 nonas diuidẽda ſunt $7\frac{1}{2}$, vt $2\frac{1}{4}$ proueniant.

DVCANTVR toties $\frac{3}{5}$ in $\frac{5}{6}$, vt inde fiant $\frac{5}{8}$. Primum $\frac{3}{5}$ ducantur in $\frac{5}{6}$, & producetur $\frac{1}{2}$. Poſtea multiplica $\frac{1}{2}$ in eum numerum, qui faciet $\frac{5}{8}$, quem inuenies ſi per $\frac{1}{2}$ ſeces $\frac{5}{8}$, ita prouenient $1\frac{1}{4}$: in quem numerum ſi ducas $\frac{1}{2}$, producentur $\frac{5}{8}$. Thema enim hoc innuit, vt numerus ex multiplicatione $\frac{3}{5}$ in $\frac{5}{6}$ productus, ducatur in eum numerum qui faciat $\frac{5}{8}$.

QVAERO, $\frac{7}{9}$ de quot ſextis exiſtunt $\frac{3}{5}$? Primum vide $\frac{7}{9}$ cuius numeri ſunt $\frac{3}{5}$. Id quod ſcire licet, ſi particulas quotas exquirens, per $\frac{3}{5}$ diuidas $\frac{7}{9}$: inde enim prouenient $1\frac{8}{27}$, cuius numeri $\frac{7}{9}$ faciunt $\frac{3}{5}$. Poſtea quære quot ſextæ ſunt in $1\frac{8}{27}$, id quod ſcies, ſecãs ea per $\frac{1}{6}$, ita inuenies $7\frac{7}{9}$. de tot ſextis $\frac{7}{9}$ exiſtunt $\frac{3}{5}$, hoc eſt de 7 ſextis, & 7 nonis vnius ſextæ.

SVBDVCANTVR $\frac{2}{3}$ de $\frac{5}{6}$ à tali numero, vt reſtent $\frac{3}{4}$ de $\frac{5}{7}$. Primum cape $\frac{2}{3}$ de $\frac{5}{6}$, quæ ſunt $\frac{5}{9}$. Poſtea ſume $\frac{3}{4}$ de $\frac{5}{7}$, quæ ſunt $\frac{15}{28}$: eas adde ad $\frac{5}{9}$, & fient $1\frac{23}{252}$. de quo numero ſi ſubductio fiat, reſtabit quod quæſitum eſt.

SVBDVCATVR dimidium trium quartarum de $12\frac{1}{2}$ à tali numero, vt quinque ſextæ duarum tertiarum de $10\frac{1}{4}$ reſtent. Primũ vide quæ ſint $\frac{3}{4}$ de $12\frac{1}{2}$. eæ ſunt $9\frac{3}{8}$: quorũ cape $\frac{1}{2}$, quæ eſt $4\frac{11}{16}$, tantum eſt dimidium trium quartarum de $12\frac{1}{2}$. Deinde vide quæ ſint $\frac{2}{3}$ de $10\frac{1}{4}$, eæ ſunt $6\frac{5}{6}$: quorũ cape $\frac{5}{6}$, quæ ſunt $5\frac{25}{36}$. Iam verò ſecundum thema ſubduci debẽt $4\frac{11}{16}$ à tali numero, vt reſtẽt $5\frac{25}{36}$. Quocirca adde $4\frac{11}{16}$ ad $5\frac{25}{36}$, & ſurgent $10\frac{55}{144}$. Is eſt ille numerus à quo ſubductio fieri debet, vt reſtet id quod thema iubet.

CVTHEBERTI TONSTALLI IN LIBRVM TERTIVM PRAEFATIO.

POSTQVAM tam in integris quàm in partium minutiis, omnem ſupputandi rationē explicauimus: ſupereſt vt ſtudioſis paululum aperiamus quantum ea conferat ad vitam degendam. Numeros nanque ipſos per ſe conſyderandos hactenus expoſuimus: quæ res auſpicantibus parum voluptatis afferre videbatur. Nunc eos ad res numeratas applicantes, artem ipſam pandemus per artis opificium. Qua de re, dici non poteſt vtrum maior capietur vtilitas, an voluptas: quando ea, quæ ſcire perneceſſarium eſt, & rudi populo velut ænigmata videntur, ſine Sphinge ſolui poſſunt. Ad quæ perueſtiganda regulas quaſdam perutiles trademus, quibus nonnulla quæſitu difficilia, quæque prima facie ſupra humani ingenij captum rudibus videri poſſunt, facile inueniātur: ex quibus altius intellectis, plurima alia ſimilia nullo negotio deprehendi queant. Eiuſmodi autem attingere præcipue eſt animus, cuiuſmodi in vita ſæpius occurrunt: quanquam his tortuoſa quædam, & quæ latentes anfractus habeant, ad maiorem ingeniorum exercitationem admiſcebimus. Verum enimuerò qui numerorum nodos explicare cupit, quæſtione quapiam propoſita, non temere antè reſpondere debet, quàm ſecum alte rem conſyderauit. Nam qui alioqui lingua quàm ingenio promptior quicquid incōſyderate in mentem venit, ſtolide mox blaterat, præterquam quòd aberrat à ſcopo, ridiculus exiſtimatur. Cæterū illud admonere lectorem operæpretium putamus, vt niſi prius teneat quomodo tam integra quàm minutias ſupputet, ne hoc libello legendo ſeſe torqueat. At ſi illis pernotis, hunc in manus ſumat, cuncta tum facilia, tum iucunda ſpondemus. Sed rem aggrediamur.

REGVLA DE TRIBVS NOTIS QVARTVM IGNOTVM COMMONSTRANTIBVS. LIB. III.

PRAECIPVA omnium regula eſt,quæ de tribus notis quartum ignotum in notitiam educentibus, ab Arithmeticis traditur. Vulgus regulam auream vocat: quòd hæc cæteris Arithmeticæ regulis, velut cæteris metallis aurum,præſtet. Quam,vt clarius explicemus, pauca quædam de proportione, quatenus ad numeros attinet,præfari omnino neceſſe eſt:ſine quibus hæc regula non facile intelligi poteſt.

PROPORTIO eſt duorum numerorum certa alterius ad alterum cõparatio, atque habitudo. Propoſitis nãque quibuſvis duobus numeris, alter altero vel maior eſt,vel æqualis,vel minor. Illa itaque ratio,qua ſeſe vel æqualiter, quãdo exiſtũt æquales, mutuo reſpiciũt: vel inæqualiter,quãdo alter altero maior eſt, aut minor, proportio vocatur:quæ nihil aliud eſt quàm eorum inter ſe comparatio. Habitudo autem certa eſt,quaſi diceres, notus quidam & diffinitus alterius numeri ad alterum reſpectus.

IPSARVM verò proportionum inter ſe ſimilitudo proportionalitas nuncupatur. Eius autem duæ ſunt ſpecies: altera continua,altera ſeparata.

CONTINVA proportionalitas inter numeros eſt,quando qua proportione primus ſe habet ad ſecundum,eadem ſecundus ſe habet ad tertium: in qua ſpecie vnus atque idem numerus medius ita duobus circa ſe poſitis numeris communicat,vt ad præcedentem comparatus primæ proportionis ſit terminus: ad ſequentem verò collatus,ſecundæ ſit initium, veluti præcedentis numeri comes quidam,& ſequentis dux. Hæc autem ſpecies in paucioribus numeris quàm in tribus inueniri non poteſt:quanquam etiam in illis numerus medius,dum bis repetitur, vicem ſubit duorũ. Sint nobis pro exemplo hi tres numeri, vnum,duo, quatuor: in his enim proportionum eſt æqualitas. Nam qua proportione vnum ſe habet ad duo,eadem ſe habent duo ad quatuor: quippe vnum ad duo comparatum ſubduplum eſt, itidémque duo ad quatuor. Similis è cõuerſo eſt inter eos habitudo quando in vtraque proportione, numerum maiorem ad ſuum minorem comparamus. Nam quemadmodum quatuor ad duo duplam habent proportionem, ſic duo ad vnum dupla ſunt.

SEPARATA verò proportionalitas eſt, quam eandem diſiunctam appellare licet, cum quatuor numerorum qua proportione primus ſe habet ad ſecũdum, eadem tertius ſe habet ad quartum. In qua ſpecie, præcedentis proportionis terminus ſeparatus eſt à ſequẽtis initio. Hæc autem ſpecies in paucioribus numeris quàm in quatuor inueniri nequit: in quibus proportionum deprehenditur æqualitas; ſiue minorem vtriuſque proportionis numerum cum ſuo ipſius maiore compares, ſiue è conuerſo. Puta ſiquis hos quatuor numeros inter ſe conferre velit, nempe duo ad quatuor, & tria ad ſex. Quemadmodum enim duo ad quatuor comparata ſubdupla ſunt, ſic ſunt tria ad ſex collata. Similiter è conuerſo, quemadmodum quatuor ad duo collata, dupla ſunt, ſic ſunt ſex ad tria cõparata. Amplius in hac ſpecie permutatim fit collatio. nam qua proportione primus ſe habet ad tertium, eadem ſecundus ſe habet ad quartum. Atque ordine etiam conuerſo, qua proportione quartus ſe habet ad ſecundum, eadem tertius ſe habet ad primum. Quo fit vt præcedentis proportionis minor numerus cum ſequẽtis minore comparatus eandem habitudinem habeat, quam ſequentis maior collatus cum præcedentis maiore. Veluti in exẽplo prædicto: ſicut primus numerus binarius ad tertiũ ternarium collatus ſubſeſquialteram proportionem habet, ſic ſecundus numerus quaternarius ad quartum ſenarium eadem eſt habitudine. Itidem ordine conuerſo, quemadmodum quartus numerus ſenarius ad ſecundum quaternarium comparatus ſeſquialteram habet proportionem, ſic tertius ternarius ad primum binarium eandem habitudinem habet. Itaque numeri huiuſmodi, quorum vna eſt proportio, proportionales vocantur. De quibus ab Euclide cum in Geometria, tum in Arithmetica longe principe regula huiuſmodi traditur, Si fuerint quatuor numeri proportionales, quod ex ductu primi in vltimum producetur, æquale comperietur ei quod ex ſecundi in tertium ductu natum erit. Atque itidem quod ex ſecundi in tertium ductu procreabitur, æquale erit ei quod prodibit ex primi in vltimum ductu.

DICI NON POTEST QVANTAM inueſtigantibus lucem ad exquirenda incognita præbeat hæc regula: cuius ea virtus eſt, vt è quatuor numeris proportionalibus ſiquis ignotus fuerit, cæteri qui noti ſunt, latitantem illum prodant. Atque ideo ſi tribus numeris propoſitis, quiſpiam inueſtigare velit quis ſit quartus, ad quem tertius ea proportione ſe habeat qua primus ad ſecũ-

dum: multiplicet ſecundum in tertium, & numerum procreatum diuidat per primum: quod poſtquam factum erit, ſectionis numerus quartum demonſtrabit. Exempli gratia: ſiquis ſcire cupit quis ſit ille numerus ad quem tria ea proportione ſe habeant, qua duo ad quatuor: tria in quatuor ducat, & enaſcentur duodecim: quæ per duo diuidat, & ſex prodibunt. Ratio huius rei in promptu eſt: nam ſecundi in tertium multiplicatio producit idem quod procrearetur ſi primus in quartum ignotum multiplicaretur. Igitur ex ſecundi in tertium ductu, quartum velut in magna turba latitantem habemus: ſed quis ſit, adhuc ignoramus. Diuiſio autem per primum facta reliquam, qua tectus eſt, multitudinem ab eo ſegregat, ſolúmque relinquit, atque à cæteris deſtitutum è latebris in lucem profert. Nam quandocunque duo numeri inter ſe multiplicantur, ſi productus numerus per alterum diuidatur, partitionis numerus alterum continebit. Veluti ſi duo in tria ducas, fient ſex: quæ ſi per duo diuidas, numerus partitionis tria continebit: ſi per tria, duo. Itaque ad hunc modum quartus numerus ignoratus exquiritur.

SIMILITER ſi tres numeri continue proportionales fuerint, quod ex ductu primi in tertium producetur, æquale deprehendetur ei quod ex ſecundi in ſeipſum ductu natũ erit. Et quod ex ſecundi in ſeipſum ductu generabitur, æquale erit ei quod naſcetur ex primi in tertium ductu. Ad eũdémque modũ tertius numerus ignotus exquiritur, dum ſecũdus numerus in ſeipſum ducitur, & numerus productus diuiditur per primũ: nam ſectionis numerus tertium monſtrabit. puta ſiquis duo ad quatuor comparans ſcire cupit quis ſit tertius numerus ad quem quatuor ea proportione ſe habeant, qua duo ad quatuor: medium numerũ, quatuor, in ſeipſum ducat, & ſexdecim creabit: quæ per duo diuidat, qui primus eſt numerus, & tertius numerus octonarius prodibit. Eadem nanque eſt in vtraque ſpecie & ratio & regula numerum ignotũ exquirendi: quod ad plurima inueſtiganda noſſe iuuabit.

HAS proprietates numeri proportionales, vbicunque occurrũt, ſemper ſecum deferunt, non ſolum quando per ſe conſyderantur, verumetiam cum ad res quaſlibet numerandas applicantur, vt eadem ex accidenti in rebus numeratis, quæ in numeris ipſis inuicem ſit habitudo. Quo fit vt innumera quæ vulgus imperſcrutabilia exiſtimat, ex proportionũ ſimilitudine veniant in notitiam, miraculúmque rudibus explicata præbeant.

ET VT à facilibus exemplis primum ordiamur, Quando tritici modij tres triginta nummis væneunt, inueſtigemus, octo modiorum tritici quantum erit pretium. Hîc palàm videmus duas eſſe proportiones: vnam de tribus tritici modijs ad octo tritici modios: alteràm de triginta nummis, trium modiorū pretio cognito, ad octo modiorum pretium adhuc ignoratum, quod eadem habitudine ad triginta nummos reſpondere debet, qua octo modij ad tres modios ſe habent. In omnibus autem proportionibus in ordinem deſignandis, à ſiniſtra incipientes tendimus in dextram, quemadmodum in ſcribendo Græci, Latini, & omnes penè gentes faciunt. non autem ſicut in numeris per notas ſignandis Chaldæos ſequimur à dextra ordiētes. Itaque in hoc exemplo, tres tritici modij, qui prioris ſunt proportionis initium, à ſiniſtra primū locum occupare debent: octo autē tritici modij, qui prioris ſunt proportionis finis, locum ſecundum dextram verſus. Triginta autem nummi, qui poſterioris proportionis initium exiſtūt, tertium locum à dextra teneant oportet.

3. 8. 30.

Quartus autem locus adhuc vacans expectat vt ſimili fine proportio poſterior claudatur, pretiúmque in eo reponatur, quòd ita ad triginta nummos reſpondeat, quemadmodum ad tres modios modij octo. Id autem per regulam ſuprà enarratam facile exquiras ſi tertium nūmerum per ſecūdum multiplices, numérūmque procreatum diuidas per primum. Igitur triginta quæ ſunt in tertio loco, multiplicata per octo quæ ſunt in ſecundo, creant ducēta & quadraginta: quæ ſi per tria diuidantur, numerus ſectionis octoginta profert: qui numerus pretium octo modiorum indicat, & quarto loco repoſitus proportionem poſteriorem complet. Sic quando tritici tres modij triginta nummis væneunt, octo conſtabunt octoginta nummis.

AD HVIVS exempli ſimilitudinem, quandocunque in rebus numeratis ratione numerorum duæ proportiones habentur, quarum alterius vtrunque extremum tam initium à quo incipit, quàm terminū in quo deſinit, cognoſcimus: alterius autem primum extremū, quod eius initium eſt, ſcimus, ſed eius terminū adhuc ignoramus: prioris initium proportionis, cuius ambo extrema nota ſunt, à ſiniſtra primo loco ponamus: eius autem terminum ſecundo loco dextram verſus: poſterioris verò proportionis initium, quod eſt notum, tertio loco notemus, & tum demū eius

terminum ad prioris proportionis ſimilitudinem initio ſuo reſpõſurum, ſecundum regulam paulo antè mõſtratam inueſtigemus. Initium proportionis (ne quis ambigat) appello eum rerum numerum qui prior in proportione præcedit, ſiue maior extiterit, ſiue minor. terminum verò eum, qui ſequitur, ſiue minor, ſiue maior fuerit. Itaque ſi poſterioris proportionis initium, quod eſt notum, numerus minor fuerit, quàm quartus inueſtigandus: minor etiam numerus in priori proportione præcedet. At ſi poſterioris proportionis initium nobis notum numerus maior exiſtat, maior itidem in priori antecedet. Similiter ſi maior rerũ numerus in priori proportione præcedit, maior etiam in poſteriori antecedat neceſſe eſt. Sin in priori præcedat minor, itidem in poſteriori fiet. alioqui proportiones ſimiles non erunt.

ILLVD autem diligenter obſeruandum eſt, vt quanuis prior proportio res vnius ſpeciei: poſterior autẽ, res alterius capiat: primus tamen à ſiniſtra ſitus numerus, qui prioris proportionis eſt initium, & ſecundus à dextra poſitus, qui finem eius complet, res eiuſdem ſpeciei numerare debeant. Similitérque tertius numerus notus, qui proportioni poſteriori dat initium, & quartus inueſtigandus, qui finem eius inuentus claudet, in eiuſdem ſpeciei rebus numerandis conſentiant: quæ res ad formandas recte proportionum ſimilitudines plurimum iuuabit. Veluti in exemplo iam dato: in quo prior proportio eſt de tribus modijs ad octo modios: poſterior autem de triginta nummis ad pretium octo modiorum inueſtigandum. Idque verum erit, vt primus & ſecundus numerus eiuſdem ſpeciei res numerent, & ſimiliter tertius & quartus inter ſe reſpondeant, non ſolum in recta proportionum ſimilitudine, quando ſicut primus comparatur ad ſecundum, ſic tertius ad quartum: verumetiam in ſimilitudine proportionum conuerſa, quando ſicut ſecundus comparatur ad primum, ſic quartus ad tertium. Cæterum ſi permutatim proportiones velis comparare, nempe prioris initium ad initium poſterioris, & terminum prioris ad poſterioris terminum: tunc primus & tertius numerus eiuſdem ſpeciei res numerabunt, & tertius & quartus itidem facient: veluti ſi in exemplo dato, cõpares tres modios ad triginta nummos, & octo modios ad pretium inueſtigandum. Quem modum ſimilitudinem proportionum fabricandi, tametſi ſit difficilior, plerique omnes qui ſupputare docent, magis nunc obſeruant: quippe qui faciliorem modum rectam proportionum ſimilitudinem

formandi ignorent. Et ad permutatam comparationem ſequendam, incitari videntur à mercatorum more, qui omnia pecunia æſtimant, quærúntque inter ſe quanti merces quælibet vendantur, quid pro ſingulis, quid pro vniuerſis ſit ſoluendum: comparationem aliarum rerum plurimum ad pecuniam, nonnunquam ipſarum inter ipſas facientes. Veruntamen vtrancunque viam ſequare, regula iam data reſpõdebit: quæ, ſiue recta, ſiue permutata proportionum comparatio fiat, ſemper cum ea congruet. Nobis autem viſum eſt iuuenum inſtituendorum gratia, in ſingulis ſequẽtibus quæſtionibus ſolum rectam proportionum comparationem, in qua quæque proportio ambo ſua extrema eiuſdem ſpeciei habet, vt intellectu faciliorem, & magis naturalem ſequi: ne ſi vtranque in ſingulis, quod nihil neceſſe eſt, inſereremus, faſtidium oboriretur legentibus. Quamobrem ante omnia multa cautione eſt opus, ne in rebus numeratis proportionum ſimilitudo, quæ ratione numerorum conſyderatur, male ſit concepta, néve pro ſimilitudine diſſimilitudo nos fallat. At poſtquam recta proportionum ſimilitudo cogitatione deprehenſa eſt, cætera per datam regulam facile explicantur.

PORRÒ vulgus in communi ſermone ferè de numero inueſtigando primùm quærit: veluti ſi quiſpiam interroget, Quanti conſtabunt tritici modij quatuor, quando centum vendũtur mille nummis? Hanc interrogationem conſyderantes, in ea proportiones duas ſtatim deprehẽdemus: alteram inter centum modios & quatuor modios, habentem notum vtrunque extremũ: alteram inter mille nummos & quatuor modiorum pretium adhuc ignoratum. Igitur nihil reſpicientes ordinẽ quærentis vulgi, quod ſemper quidlibet, vt in buccam venerit, loquitur: nobiſcum conſyderemus proportionem illam inter centum modios & quatuor modios, quam vulgus cum altera confundit: ambo extrema nota habere, atque ideo alteri præponendam eſſe: alteram autem proportionẽ, de mille nummis ad pretiũ adhuc ignoratũ poſteriorẽ fore debere. cuius initiũ notũ, quia maior exiſtit numerus, quàm quartus inueſtigandus, maior itidem numerus in priori proportione præcedet. quocirca primo loco maiorẽ prioris numerũ, nẽpe centum notemus: eius autẽ minorẽ numerũ quatuor, loco ſecũdo: tertio verò loco ſignemus poſterioris initium notũ, videlicet mille.

100	4	1000

Hac ratione proportiones in ordinem aptantes, ſecundũ datam

regulam mille per quatuor multiplicemus, & prodibunt quatuor millia, quæ per centum ſecta faciunt in numero partitionis quadraginta, qui numerus eſt quæſitus.

IN HOC autem exemplo, ſicui permutatam proportionum ſimilitudinem ſequi magis placet, ſic eas comparabit, Sicut centum modij ſe habent ad mille nummos, ſic quatuor modij ad pretium inueſtigandum: vt tertio loco numerus medius ponatur, tertiúſque numerus in loco medio: tantilla enim differentia eſt inter rectam proportionum ſimilitudinem, & permutatam. Veruntamen ſiue hanc, ſiue illam comparationem ſequi libet, nihil reſpiciemus ad ordinem quærentis vulgi: quin potius ad hanc exempli formam alia tortuoſe quæſita ad rectam proportionum ſimilitudinem cogitando reduci poſſunt.

HIS DVOBVS exemplis in vtraque proportione res vænales præceſſerunt, pretium verò ſequutū eſt de quo fuit quæſtio. Nunc exemplum petamus vbi præcedat pretium, quæſtio autem de rerum vænaliū numero ſequatur. Quando octoginta nummis tritici modij octo emuntur, quot haberi poſſunt pro triginta nummis? Hic manifeſte ſunt duæ proportiones, altera de 80 nūmis ad nummos 30. altera de octo modijs ad numerū modiorum inueſtigandum. Et quia in poſteriori proportione numerus modiorū notus maior eſt, quàm is qui inueſtigatur: pretiū quod eſt maius octoginta nummorū in priore proportione primū locū tenet: minórque nūmorum numerus ſecundū: tertium autem occupat octo modiorū numerus, qui eſt notus. Quæſtióque fit de numero modiorū ignoto. Digeſtis igitur in ordinē numeris, ad hunc modū,

80. 30. 8.

triginta per octo multiplicentur, & ſurgent ducenta quadraginta: quæ ſi per octoginta ſint ſecta, numerus ſectionis tria continebit. ſic quando nūmi octoginta reddunt octo modios, triginta nummi afferent modios tres. Ita ſi primum exemplum ſuprà datum cū hoc conferas, tam illius proportionū loca, quàm earū extrema ipſa, cōuerſa eſſe in hoc exēplo videbis. qui illic quartus numerus erat, hic primus eſt: qui illic tertius, hic ſecūdus: qui illic ſecūdus, hic tertius: qui illic primus, hic quartus & poſtremus: quæque illic proportio erat prior, hîc poſterior reperitur, vt facile cuiuis appareat res numeratas rationem numerorum etiam conuerſorum ſequi, nihílque referre quæ res numerētur, dummodo proportio illa cui9 in rebus numeratis ambo extrema ſunt nota, præ-

cedat, illâque cuius initium ſolum notum eſt, ſequatur.

ATQVE ideo ſiquis experiri cupit an in quarti numeri inueſtigatione error ſit admiſſus, hac ratione id facile deprehendet, vt in proportionum comparanda ſimilitudine, ambarum ſedes atque etiam extrema ipſa conuertat: veluti in exemplo iam dato, quod omnia primo contraria habet. Vel ſi magis libet: ſedes earum ſolas mutet, poſterioremque ex priori faciat, atque ex poſteriori priorem. Quippe mutatis proportionum ſimul locis, atque extremis, vel etiam locis ſolis, ſi nihil erratum erit, neceſſe eſt eorum numeros ſedes mutatas ſequi. quare ſi alij numeri in his inuenti fuerint, propter errorem calculi totum opus ab initio repetendum eſt. Mercatorum vulgus ſumens experimẽtum num quis error interuenerit, hanc locorum in proportionibus mutationem, regulam de tribus conuerſam vocat, cum vna tantum ſit regula, ſecundum quam cuique licet, quam velit quæſtionem explicandam proponere.

QVÒD ſiquando eueniat vt rerum numerus ex ſecundi in tertium ductu, proueniens numero diuiſore ſit minor, ſectionémque non ferat, tum numerus ille minor in numerum partium in ſe contentarum eſt multiplicandus, vt diuiſoris ſectionem maior per incrementum factus recipere ſufficiat. Conſyderandúmque eſt, quale rerum genus numerus ille numerat: puta an argenti libras, aut aureos, qui in nummorum, quibus æſtimantur, numerum multiplicari poſſunt: an maiora pondera, quæ in numerum librarum, aut vnciarum duci: an dolia vini aut olei, quæ in amphorarum, congiorũ, aut ſextariorum numerum multiplicari: an iugera, quæ in perticarum, aut pedum numerum ducta augeri poſſunt: vel quicquam aliud ſimile. Exemplum huius rei afferamus. Centũ oues emptæ ſunt aureis viginti, quãti conſtiterũt tres? Proportionibus recte in ordinem redactis ad hunc modum,

100 3 20

Secundus numerus ternarius in tertium viginti aureorum ductus creabit ſexaginta: qui numerus quoniam per centum diuidi nequit, ſoluamus aureos illos in viliorem pecuniam. & quoniam ſinguli aurei (de angelis nunc loquor) æſtimantur octoginta nũmis, in illum nummorum numerum 60 ducamus: & prodibunt quatuor millia & octingenta: qui numerus maior eſt diuiſore cẽtenario, per quem ſectus in numero partitionis prodire faciet quadraginta octo. Sic quando 100 oues emuntur 20 aureis, 3 conſta-

bunt 48 nummis. Nec quempiam illud moueat, quòd in ſecunda proportione finis initio, id eſt quartus locus tertio non videatur reſpondere, quòd hic nummos, ille aureos habeat: cum vterque locus idem rerum genus, nempe pecuniam contineat, licet pecunia maior in minutiorem, velut in partes ſuas ideo ſoluta ſit, vt diuiſoris ſectionem numerus diuidendus caperet.

VBI AVTEM ex diuiſione reliquum quidpiam erit quod per diuiſorem amplius ſecari non poſſit, ſimiliter reliqui numeratorem in partes ſuas notas, ſiquas huiuſmodi habeat: alioqui in partes pro arbitrio denominandas, multiplicetur, vt diuiſoris, qui denominator eſt, ſectionem maius factum pati poſſit. quæ cum peracta erit, numerus partitionis manifeſtabit: pro quot partibus, vel notis, vel denominandis ipſum reliquum valeat. quemadmodum in ſuperiori libro de reliqui æſtimatione facienda diximus. Exempli gratia, Si nouem vlnæ panni (vt mercatoris vocabulis vtamur) conſtiterunt tribus aureis, quanti empta eſt vna? Proportionibus in ordinem diſpoſitis, vt nouem primo loco ſint, vnum ſecundo, tria tertio,

9. I. 3.

quia vnitas nullum numerum multiplicat, ſolum ſupereſt vt tertius trium aureorum locus diuidatur per primum numerum nouem. quod quoniam fieri nequit, redigendi ſunt aurei ad viliorem pecuniam. aureúſque puta, æſtimetur 80 nũmis (nam ſic æſtimãtur angeli) numerúſque aureorum ductus in numerum nummorum procreabit 240. quæ cum per nouẽ ſecta ſint, numerus partitionis proferet 26 nummos: & reliquæ erunt $\frac{6}{9}$. Et quia nummi partes notas habent quadrãtes, quorũ quatuor pro nũmo valent, ſex in quatuor ducamus: & fient 24. iterum ea ſecta per nouem, in numero partitionis educunt duo, & adhuc reſtãt $\frac{6}{9}$ vnius quadrãtis. Et quia quadrãs minores partes apud nos notas nõ habet, per partes quaſlibet denominandas, puta quatuor, illum æſtimemus. iterũmque ducamus ſex reliqui numeratorem in quatuor: & denuo fient 24. quæ rurſus diuiſa per nouẽ in numero ſectionis duo facient, & adhuc ſuperſunt $\frac{6}{9}$ vnius quartæ partis vnius quadrantis. quas ſi cuipiã amplius minutias ſectari libet, poteſt vltrà diuidere in partes quaſcunque velit. Igitur quando nouem vlnæ tribus aureis emptæ ſunt, vna vlna cõſtitit 26 nummis, duobus quadrantibus, & duabus quartis vnius quadrantis, ac ſex nonis vnius quartæ partis vnius quadrantis. $\frac{6}{9}$ reductæ faciunt $\frac{2}{3}$.

ILLVD HOC loco admonendum eſſe duximus, quoniam vnitas quenuis numerum multiplicans aut diuidens nihil eum omnino vel auget vel diminuit: quãdocunque proportionibus in ordinem, ſecundum quod antè dictum eſt, digeſtis, ipſa vnitas primũ locum tenebit, nulla diuiſione opus eſt. Quemadmodum ſi ea ſecundum aut tertium locum occupabit, ſecundi in tertium ductus non eſt neceſſarius: imò tunc ſufficiet, ſi maior alteruter eorum numerus per primum diuidatur. Exemplum, quando vnitas primum occupat locum, Quando piperis libra ſexdecim nummis cõſtat, centum librarum quantum erit pretium? Diſpoſitis in ordinem proportionum numeris,

1. 100. 16.

tertij numeri pretium indicantis in ſecundum centenarium multiplicatio abſque vlla diuiſione rem totam expedit. Exemplum, quando vnitas ſecundum locum tenet, Quando mille aurei ſex captiuos redimunt, quanti ad eam rationem redimi poteſt vnus? numeris ſic ſignatis,

6. 1. 1000.

poſt tertij numeri millenarij ſolam diuiſionem per primum ſenarium factã, res eſt expedita. Similiter etiam fiat ſi tertium locum vnitas tenebit.

Quando minutiæ occurrunt in regula de tribus notis quartum ignotum monſtrantibus, quid ſit faciendum.

SI PROPORTIONIBVS in ordinem aptatis, in quouis trium locorũ minutiæ interueniant: integri numeri illius loci, ſiqui ſunt admixti, ſtatim in minutias redigantur. id quod fiet, ſi numerus integrorũ per minutiarum appoſitarũ denominatorẽ multiplicetur, & numero procreato earũ numerator addatur: eiſque ſic aucto, ſub linea interiecta, ſubdatur denominator, quẽadmodũ in ſuperiori libro docuimus, de integris in minutias ſoluendis præcipiẽtes. In eo autem loco, in quo nullæ interceſſerunt minutiæ, numeri integri velut minutiæ per vnitatem ſub linea ſubdendam ſcribantur, vt omnia loca formam minutiarum referant. Deinde ſecundi loci in tertiũ multiplicatio, & numeri producti diuiſio fiat: quemadmodum de minutijs præceptum eſt. Exemplum vnũ ſufficerit eiuſmodi, Quando ſerici tres vlnæ cum dimidio, vt mercatorijs vocabulis vtamur, ſex aureis ſunt emptæ, quanti conſtiterũt tres quartæ? Integris primi loci ſolutis in minutias, ſeptem orien-

tur ſecundæ $\frac{7}{2}$. Locúſque ſecundus ſolas continet minutias $\frac{3}{4}$. Locus integrorum tertius in ſpeciem minutiarum ſic ſcribendus $\frac{6}{1}$. Itaque ſic locatis minutijs $\frac{7}{2}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{6}{1}$ ex ſecundi loci in tertium ductu naſcentur $\frac{18}{4}$. quæ diuiſa per $\frac{7}{2}$ educunt $\frac{36}{28}$. Ea conſtituunt vnũ integrum.& reſtant $\frac{8}{28}$: quæ ad minimam nomenclaturam redactæ, faciunt duas ſeptimas. Atque hoc pacto, quando tres vlnæ ſerici cum dimidio emptæ ſunt ſex aureis, $\frac{3}{4}$ vnius vlnæ vno aureo & duabus ſeptimis conſtiterunt. Quòd ſi minutiarũ minutiæ vel ſimplicibus minutijs, vel integris admixtæ ſeſe offerent: antequam opus aggredimur, reducenda ſunt omnia in vnam minutiarum faciem, quẽadmodum ſuperiori libro docuimus: poſteáque fiat multiplicatio & diuiſio ſicut in minutijs fieri conſueuit.

Pecuniæ cuiuſuis in quamlibet permutatio quomodo ſit facienda. Quæſtio II.

SI QVISPIAM ab aliqua regione in aliã longe profecturus, ad periculum à latronibus vitandũ, pecuniã eius nationis vnde proficiſcitur, menſarijs dare velit, vt eius æſtimationẽ illic, quò iter deſtinat, recipiat: ſciréque cupiat quantum in illius regionis pecunia ſit habiturus, id hoc modo facillime dignoſcat. Principio maiorẽ quamuis pecuniã in viliorem per multiplicationem redigi, contráque viliorem in quamlibet maiorem per diuiſionem reduci, penè manifeſtius eſt quàm vt ſit admonendũ. Quamobrẽ pecuniã permutaturus primum animaduertat, quot minutioribus nummis illius regionis vbi ſit permutatio, mẽſarius vnum aureũ regionis alterius, quò iter adornat, æſtimat. qua de re cũ eo pacta inire oportet. Quod cũ obſeruauerit, omnem illam pecuniæ ſummã, quam menſario daturus eſt, ſiue in argenti libris, ſiue in aureis fuerit, in eoſdem nummos minutiores redigat. Id quod fiet è veſtigio: ſi totius ſummæ permutandæ numerum in eum nummorũ eorundẽ numerum, quo pars ipſius, puta libra vna vel aureus vnus æſtimatur, multiplicet. Deinde numerum ex hoc enaſcentẽ per ſummam æſtimationis vnius aurei illius regionis, quò iter parat, diuidat. & numerus ſectionis patefaciet quot illic aureos ſit recepturus. Cuius rei ratio per regulam de tribus notis quartum ignotum proferentibus, palàm nobis conſtabit, vti mox in exemplo dicemus.

ROMAM profecturus quiſpiam mille aureos angelos octoginta nummis ſingulos æſtimatos, menſarijs tradidit, vt Romæ ei redderent aureos ducatos. conuenítque in ſingulos quinquagin-

ta quatuor nummos, Romæ ſingulos aureos ducatos reddi. ſcire cupit quot ducati Romæ ſunt reddendi. Primũ aureis angelis mil le multiplicatis in octoginta nummorum numerum, qui numerus vnius aurei æſtimationem capit, ſurgunt octoginta nummorum millia. quæ nummorum ſumma facile in ducatos commutatur, ſiquis ſecum conſyderet, Quæ proportio eſt inter quinquaginta quatuor nummos, qui pro vno ducato de compacto valent, & octoginta nummorũ millia, quibus mille aurei angeli æſtimantur: eandem inter vnum ducatum & numerum ducatorum inueſtigandum eſſe debere. Vel ſi magis libet, permutatim, Quæ proportio eſt inter quinquaginta quatuor nummos & vnum ducatũ, eandem eſſe inter octoginta nummorum millia & numerum ducatorum exquirẽdum. Itaque proportionibus in ordinem diſpoſitis, ad hunc modum 54. 80000 1. quia ſecundus numerus octoginta millium, per tertium vnitatis numerum nihil augetur, ſola ſecundi diuiſio per primum numerũ 54 facta ſufficiet, quæ in numero partitionis prodire faciet mille quadringenta octoginta vnum. & viginti ſex numeri ſuperſunt, qui numerus eſt aureorum, Romæ ex pacto reddendus.

ET QVANVIS in pecuniarũ permutatione, quæ ab alia regione in aliam frequentatur, pecunia aliqua vilior plurimum quæratur, qua vtriuſque nationis pecunia maior ſecundum ſui pretium prius æſtimetur, quàm ad proportionum regulam iam datam numeri applicari poſſint, veluti in exẽplo proximo, qui modus & facilis eſt, & expeditus: interdum tamen breuior via reperitur. Quippe quando aliquis argenti, librarum, aut aureorũ, aut cuiuſuis pecuniæ numerus illius regionis, vbi fit permutatio, alicui vel librarum, vel aureorum, vel cuiuſlibet pecuniæ numero, in ea regione, in quam commutamus, ita ex pacto reſpondet vt nihil omnino vel deſit, vel ſuperſit: tum abſque vlla in viliores nummos reductione facienda, ſtatim ad proportionum regulam numeros applicabimus. Exempli gratia. tres aurei angeli pro quinque coronatis Gallicis valent. mille angeli quot coronatos reddent? Cõſyderatis proportionibus, deprehendemus, quæ proportio eſt inter tres aureos angelos & mille, eandem inter quinque coronatos & numerum coronatorum exquirendum eſſe debere. Vel ſi libet, permutatim, Quæ proportio eſt inter tres aureos angelos & quinque coronatos, eandem eſſe inter mille angelos, & numerum coronatorum inueſtigandum. 3. 1000. 5.

Facientes igitur id quod iubet regula, comperiemus aureos angelos mille reddere coronatos mille ſexcentos ſexaginta ſex & duas tertias vnius coronati.

Societatis regula. Quæſtio III.

TRES MERCATORES ſocietatem inierunt, ſuas quiſque pecuniæ partes in medium conferentes. quorum primus nonaginta aureos attulit, ſecundus ſexaginta, tertius quinquaginta. atque impigre mercaturam exercētes centum aureos lucri fecerunt: quos inter ſe diuidere cupientes, ambigunt quantum cuique ſecūdum pecuniæ collatæ portionem, de lucro ſit ceſſurū. Hanc quæſtionem altius nobiſcum conſyderantes, confeſtim animaduertemus (id quod in omni ſocietate ſemper conſyderandum eſt) lucrū hoc commune centum aureorum, ex cōmuni omnium accreuiſſe pecunia. & quemadmodum pecunia cōmunis commune lucrum peperit, ita ſuam cuiuſque pecuniā id attuliſſe lucri, quod ad quenque pro ſua portione pertinebit. Quare ſicut omniū partes, ſimul additæ ſe habent ad ſingulorum partes: ſic omnium commune lucrum ad lucrum ſingulorum ſe habere debet. Et permutatim, ſicut omnium partes ſimul additæ ſe habēt ad cōmune lucrum, ſic partes ſingulorum ad ſingulorum lucrū ſe habere debent. Itaque hæſitationem hanc ad regulam quatuor proportionalium applicantes, ſtatim eam explicabimus. Quocirca primus locus omnes omnium partes in ſocietatē collatas ſimul additas habere debet. Secundus autem ſuam cuiuſque pecuniæ partem ſeparatim aliā ſub alia notatam. Tertius verò commune lucrum. Poſt eam numerorum ordinationem pecuniæ pars à quolibet collata ſeorſum in lucrum commune ducatur, & numerus ex hoc enatus per omnium partium ſummam ſimul additam diuidatur. Ita cuiuſque partitionis numerus lucrum ſingulorū patefaciet. quod quarto loco è regione partis cuiuſque collatæ, ſtatuendum eſt eo modo qui ante oculos numerorum notis hic ſubſignatur.

	90			Primo 45.
200	60	100	lucri fiunt pro	Secūdo 30.
	50			Tertio 25.

In omnibus autem ſocietatis regulis, an recte ſit ſupputatum, ſpecimen hinc capere licet. ſi lucra ſingulorum ſimul addita communis lucri ſummam reddant.

MINVTIAE etiam ſiquæ reſtabunt, per additionem colligan-

tur:atque integra,quæ ex his creabuntur,integrorum addantur nũmero.Cuiuſmodi exemplum erit.ſi primus contulit quadraginta, ſecundus triginta,tertius viginti.de qua pecunia communi quinquaginta lucri fiunt.

	40			Primi 22 & $\frac{20}{90}$ quæ faciunt	$\frac{2}{9}$
90	30	50	Lucrũ	Secũdi 16 & $\frac{60}{90}$ quæ faciuut	$\frac{6}{9}$
	20			Tertij 11 & $\frac{10}{90}$ quæ faciunt	$\frac{1}{9}$

Reliquæ omnes minutiæ in hoc exemplo ſimul additæ faciunt vnum integrum.& ſingulorũ lucra addita creant quadraginta nouem:ſic ſurgunt quinquaginta, quæ communi lucro reſpondent.

Societatis regula ſecũda,in qua temporum diuerſitas interuenit. Quæſtio IIII.

TRIVM mercatorum ſocietatẽ ineuntium, primus quadraginta quatuor aureos contulit in medium,atque octo menſibus in ſocietate permanſit.Secundus triginta duos cõferens aureos, perſtitit in ſocietate menſibus ſex. Tertius, qui attulit aureos viginti quatuor,in ſocietate menſes quatuor manſit.ex quibus lucri facti ſunt aurei octoginta. Ambigi poteſt quantum cuique lucri,ſecundum temporis & pecuníæ quantitatem, debeatur. In hac hæſitatione atque eius ſimilibus, altius intuenti primum illud occurrit, quod in omni ſocietate conſyderandum eſſe ſuperiori regula diximus: videlicet vt ſicut omnium partes ſimul additæ ſe habent ad ſingulorum partes:ſic omnium commune lucrum ad lucrum ſingulorum ſe habere debeat.Et permutatim,ſicut de omnium partibus ſimul additis occurrit comparatio ad commune lucrũ : ſic de ſingulorum partibus ad lucrum ſingulorum. Cæterum hæc comparatio geminam conſyderationem habet, tam temporis inæqualis,quàm inæqualis pecuniæ.quorum vtrunque ad cuiuſque lucrũ excutiendum parem cogitationem requirit: nec alterum ab altero ſeiungi poteſt.quãdo nec pecunia cuiuſque ſine ſuo tempore,cuique lucrum attulit,nec cuiuſque tempus ſine ſua pecunia. Immò verò ſicut omnium pecunia ſimul addita atque omnium tempora coaceruata,commune lucrum vniuerſis peperit:ita cuiuſque pecunia connexa cum ſuo tempore,cuique lucrum dedit. Itaque cũ de pecunia & tempore cuiuſque,quæ ſeparari non poſſunt,gemina comparatio ſimul fieri debeat,tam ad aliorum pecunias & eorũ

tempora, quàm ad commune lucrum,& lucrum cuiuſque ſuum: pecuniam cuiuſque per ſuum ipſius tempus multiplicare oportet. Quo fiet vt numerus ex hoc productus proportiones partium ſuarum, eorum inquam numerorum, ex quibus in ſe ductis enatus eſt,comprehendat. Etenim ſecundum Euclidis ſcitum, Omnium duorum numerorum compoſitorum proportio alterius ad alterũ eſt ex laterum ſuorũ producta proportionibus. Latera numerorũ Euclides vocat quorũ multiplicatione numeri producuntur. Poſtquam multiplicationem cuiuſque temporis cum ſua ipſius pecunia ſeparatim factam, quoniam ſingulæ pecuniæ partes cum ſingulis temporis multiplicando coiuerunt:vnúſque numerus ſic de vtroque factus eſt vt de gemina comparatione proportio vnà virtutem vtriuſque complectens prodiuerit:numeri ipſi procreati ſeorſum ſunt notãdi,vt ad regulã ſocietatis applicari poſſint. Quippe ſicut omnium pecunia cum omnium tempore coniuncta ſe habet ad ſuam cuiuſque pecuniam copulatam cum ſuo tempore:ſic lucrum omnium commune ad ſuum cuiuſque lucrum ſe habere debet. Et permutatim, ſicut omnium pecunia cum omnium tempore copulata ſe habet ad commune lucrum,ſic ſua cuiuſque pecunia cum ſuo tempore connexa, ad ſuum cuiuſque lucrũ ſe habere debet. Itaque per regulam quatuor proportionalium quæſitum explicabitur,ſi numeri omnes ex temporis & pecuniæ multiplicatione ſeorſum procreati ſimul addantur: ſummæque ex his collectæ primus locus detur.Secundus autem aſſignetur numeris ſeorſum enatis ex vnius cuiuſque pecuniæ ductu in ſuum tempus, vt ſeparatim alius ſub alio notetur. Tertius verò locus lucrum commune partum habeat. Deinde ſeorſum ſecundi loci numerus cuiuſque procreatus ducatur in commune lucrũ,quod tertij loci eſt: numerúſque ex hoc enatus per primi loci numerũ diuidatur,quẽadmodum in proxima ſocietatis regula dictum eſt:& numerus ſectionis declarabit quantum cuique lucri ſecundum temporis & pecuniæ quantitatem debeatur.quod quarto loco è regione cuiuſque pecuniæ reponendum eſt,ad hunc modum,

	352			Primus 44
640	192	80	Lucrum facit	Secũdus 24
	96			Tertius 12

Societatis regula tertia, quando temporibus intermiſſis, variæ ſummæ interdum communicatæ, interdum ſubductæ fuerunt. Quæſtio V.

QVATVOR mercatores ſocietatem inierunt biennio duraturam: paciſcentes, vt pro portione pecuniæ conferẽdæ lucrum cuique accreſceret. Quorum primus ab initio triginta aureos contulit, & poſt octauum menſem tranſactum, eorum decem de medio ſubduxit. iterúmque viceſimo menſe inchoante, duodecim aureos in ſocietatem intulit. Secundus à principio viginti quatuor aureos attulit, ac poſt ſextum menſem abſtulit octo. denuóque ſextidecimi menſis exordio, quatuordecim in commune exhibuit. Tertius ſtatim ab inita ſocietate, viginti aureos intulit, peractíſque menſibus ſeptem, omnem ſuam pecuniã de medio exemit. rurſúſque menſe decimo octauo incipiente, ſexdecim impoſuit aureos. Quartus demum ſeptimo menſe inchoante decem & octo aureos pro ſe contulit, atque horum nouem abſtulit poſt quartum menſem finitum. iterúmque decimo ſeptimo menſe exordiente, quindecim in ſocietatem addidit. De quorum omnium pecunia cõmuniter in ſocietatem collata, lucri facti ſunt aurei centũ. Ambigitur, tranſacto biẽnio quantum cuique lucri cedet. Hæſitatio hæc propter intricatam tum ſummarum, tum temporum varietatem, plus induſtriæ quàm acuminis exigit. Siquidem propius rem contemplantibus, illud manifeſtum eſt. ſicut communis omnium pecunia cum omnium temporibus coniuncta commune lucrum attulit: itidem ſuam cuiuſque pecuniam cum ſuo tempore copulatam ſuum cuique lucrum afferre par eſſe. Singula igitur cuiuſque mercatoris tempora, quibus ſumma quæque ipſius in ſocietatem communicata, nec de medio exempta fuit, in pecunias ipſorum temporum ſeorſum multiplicata, ſimul ſunt addenda. Quæ pecuniarum cum tempore coniunctio, cum ad eum modum per ſingulos mercatores abſoluta erit, quatuor proportionalium regula rem totam ſic expediet, quemadmodum proximo capite latius edocuimus. Quod ipſum ſatis fuerit eruditis oſtendiſſe. Cæterum quoniã hæc pecuniarum in ſocietatem importatio atque exportatio, alio atque alio tempore facta maiorem in fronte quàm in receſſu difficultatem oſtentat: ne quem terreat tam varia rerum facies, nodum hũc explicabimus, vt auſpicantibus viã monſtremus, ſimilia, ſiqua occurrent, ſoluendi.

Primus itaque mercator à principio triginta aureos octo menſibus in ſocietate habuit. vt igitur tempus illud cũ pecunia copuletur, 8 in 30 ducãtur, & fient 240: quæ ſeorſum tantiſper, dum alia expediuntur, notanda ſunt. Poſt octauum menſem finitum, vſque ad vigeſimum, decem aureis ſubductis, ſoli 20 reliqui manſerunt, vndecim menſibus medijs. 11 igitur in 20 ductis, creantur 220: quæ ſimiliter interim notentur ſeorſum. Poſtea viceſimo menſe, ad viginti aureos, qui adhuc in ſocietate remanſerunt, alij 12 ſunt illati. Hæ duæ ſummæ ſimul additæ faciunt aureos 32: qui mẽſibus quinque vſque in finem anni communes fuerunt. Igitur 5 in 32 ducta, educunt 160. quæ ſub alijs ſummis ſeorſum notatis ponãtur. Deinde illæ omnes ſummæ ſeorſum notatæ ſimul addantur, & proueniẽt 620. Ea ſumma ſurgit ex omnibus primi mercatoris tũ ſummis, tum menſibus ſimul coeuntibus. Secundus autem mercator ab initio 24 aureos ſex menſibus in ſocietatem communicauit. quare 6 in 24 ducta producent 144: quæ ſeorſum notentur. A ſexto autem menſe tranſacto vſque ad ſextumdecimum, nouem menſibus medijs, cum octo aurei ſubducti eſſent, reliqui erant 16. quocirca 9 in 16 ducta creabunt 144, ſeorſum ſimiliter notanda. Demum menſe decimoſexto 14 aurei in ſocietatem illati additi ad priores 16, faciunt 30, qui nouem menſibus reliquis cõmunes fuerunt. 9 itaque in triginta ducta procreabunt 270, quæ ad reliquas ſummas ſeorſum notas addita producunt 558. Ea ſumma eſt & tẽporum & pecuniæ ſecundi mercatoris ſimul coniunctorum.
Tertius mercator ſtatim ab inita ſocietate viginti aureos inferẽs, ſeptem menſibus eos in ſocietate reliquit. & ideo 7 in 20 ducta, creabunt 140. quæ ſeorſum ſignentur. Poſt menſem autem ſeptimum finitum, cum pecuniam ſuam omnem exemiſſet, nihil cum cæteris habuit commune vſque ad decimumoctauum menſem: in cuius initio denuo 16 in ſocietatem intulit. quæ per 7 numerum menſium relictum multiplicata producunt 112 ea priori ſummæ ſeorſum notatæ addita procreant 252. Quæ ſumma eſt & temporum & pecuniarum tertij mercatoris ſimul coeuntium.
Quartus mercator ſeptimo demum menſe inchoãte 18 aureos cõferens, quatuor menſibus eos in ſocietate continuit. quamobrẽ 4 in 18 ducta, progenerant 72. quæ ſeorſum ſubnotemus. A fine autem quarti menſis poſt illatam pecuniam tranſacti, vſque ad menſem decimũſeptimũ, ſublatis nouẽ aureis, adhuc nouẽ reſtabant: menſibus ſex medijs. ea propter 6 in 9 ducta educunt 54: ſeorſum

& ipſa notanda. Decimo ſeptimo menſe incipiente, ad 9 quæ in ſocietate remanſerant 15 adiūxit, quæ faciunt 24. ea per 8 numerum menſium relictum multiplicata, educent 192. quæ ad alias ſummas ſeorſum ſignatas addita, perficient 138. ea ſumma eſt tum mēſium, tum pecuniarum quarti mercatoris. Iam verò ſingulorum mercatorum temporibus cum ſuis pecunijs connexis, ſupereſt vt omniū ſummæ ſeorſum annotatæ ſimul addantur. Inde ſurgent 1748. quæ ſumma ex omnibus tum pecunijs, tum menſibus omniū mercatorum collecta primum locum tenebit. Secundum verò ſingulorum ſummæ tum pecunias cuiuſque tum menſes complectentes ſeorſum aliæ ſub alijs notatæ. Tertium autem locum commune lucrum habebit. Deinde ſecundum regulam quatuor proportionalium multiplicatio, & diuiſio fiat: & lucrū in quarto loco pateſiet, ad hunc modum,

	620		Primi 35 & $\frac{205}{437}$
	558		Secūdi 31 & $\frac{405}{437}$
1748		100 Lucrum	
	252		Tertij 14 & $\frac{182}{437}$
	318		Quarti 18 & $\frac{84}{437}$

Diuerſarum regionum ponderis coæquatio.
Quæſtio VI.

CENTVM pondo ab Alexandria in Angliam deportata reddūt pondo ſeptuaginta quinque: quantum reddent Alexandriæ Anglica pondo ducenta triginta ſex? Rem conſyderanti facile ſuccurrit, quæ proportio eſt inter ſeptuaginta quinque pondo Anglica & ducenta triginta ſex Anglica, eandem eſſe inter cētum Alexandrina & numerū quem de Alexandrinis quærimus. Et permutatim, quæ proportio eſt inter ſeptuaginta quinque Anglica & centum Alexandrina, eandem inter 236 Anglica, & numerum quem de Alexādrinis quærimus, eſſe debere. Quocirca primo loco poſitis 75, ſecundo 236, tertio 100: quatuor proportionalium regula deprehēdit ducēta triginta ſex pondo Britannica reddere Alexandriæ trecenta quatuordecim & $\frac{50}{75}$, quæ ſunt $\frac{2}{3}$.

Anglica	Anglica	Alexandrina	Alexandrina
75	236	100	314 $\frac{50}{75}$, quæ ſunt $\frac{2}{3}$.

Lucri exploratio. Quæſtio VII.

SI DE centum aureis aurei duodecim in annum lucri fiant, ſecundum eam rationem de aureis ſeptuaginta nouem quantum lucri in annū creſcet? Facile eſt explicatu. nam quæ proportio eſt numeri centenarij ad ſeptuaginta nouem, eadem erit numeri duodenarij ad lucrum quæſitū. & permutatim, quæ proportio eſt numeri centenarij ad duodecim, eadem erit de ſeptuaginta nouem ad lucrum inueſtigatum. Diſpoſitis itaque in ordinem numeris, vt primum locum centum tenant, ſecundum ſeptuaginta nouem, tertium duodecim: quatuor proportionaliū regula demonſtrat ex aureis 79 lucri fieri aureos nouem, & $\frac{48}{100}$ quæ ſunt $\frac{12}{25}$.

Aurei	Aurei	Lucrum	Lucrum
100	79	12	9 $\frac{48}{100}$, quæ ſunt $\frac{12}{25}$.

Hoc lucrum per omnia par eſt vſuræ centeſimæ, qua maiorē apud Romanos leges non permittunt. De ſingulis nanque centenis duodena quotannis in fœnus vſura centeſima exigit. quæ ideo centeſimæ nomē habet, quòd cum in menſes vſuræ debeātur, pars ſortis centeſima ſingulis menſibus in vſuram venit, centeſimóque demum menſe ſortem fœnus æquat. Intra centeſimam minores vſuræ interdum centeſimæ dodrantem, interdum beſſem, in menſes reddunt: quæ etiam ipſe graues exiſtimātur. At mediocres putantur quæ eius ſemiſſem in menſes pendūt. Quæ verò non vltra centeſimæ trientem, aut quadrantem, aut ſextantem in menſes pariunt, ciuiles habentur & humanæ.

Lucri exploratio in tempore maiori. Quæſtio VIII.

MERCATOR ex aureis ſeptuaginta per menſes tres lucri fecit quinque: quantum lucri tredecim menſibus ex aureis ſeptuaginta obueniet? Duæ proportiones deprehēduntur. altera de tribus mēſibus ad menſes 13, altera de quinque lucrifactis ad numerum inueſtigatur. Nam ſicut tres menſes ſe habent ad menſes tredecim, ſic quinque lucrifacta ad numerum quæſitum. Et permutatim, ſicut tres mēſes ad quinque lucrifacta ſe habēt, ſic 13 menſes ad numerum inueſtigatum. Quare quatuor proportionalium regula duce, primo loco ſtatuentes 3, ſecundo 13, tertio 5, comperiemus aureos viginti vnum & duas tertias 13 menſibus lucri fieri.

Menſes	Menſes	Aurei	Aurei
3	13	5	21 $\frac{2}{3}$.

Temporis inueſtigatio in lucro maiori. Quæſtio IX.

QVI PER mēſes quatuor ex aureis nonaginta, lucri fecit quinque, ſcire cupit quanto tempore iidem aurei lucri centum reddēt. Hæſitatio hæc proximæ ſimilis eſt, præterquam quòd hic de tempore, illic de lucro fit inueſtigatio. Simili igitur modo ſoluēda eſt: quippe duæ proportiones apparent. Nam ſicut quinque aurei lucri facti ſe habent ad aureos centum lucri faciendos: ſic quatuor menſes quibus quinque aurei lucri accreuerunt, ad numerum mēſiū inueſtigatū. Et permutatim, ſicut quinque aurei lucri facti ſe habēt ad menſes quatuor: ſic 100 aurei lucri faciendi ad numerū mēſium, de quo quæſitum eſt. Primo igitur loco notatis 5, ſecundo 100, tertio 4, regula quatuor proportionalium aureos 100 ex 90 lucri fieri menſibus 80 manifeſtat. qui numerus menſium creat annos ſex & menſes octo.

Aurei	Aurei	Menſes	Menſes
5	100	4	80

Lucri inueſtigatio ex maiori pecunia ſecundum reſpectū lucri ex ſumma minori. Quæſtio X.

MERCATOR quiſpiam tribus menſibus ex decem aureis lucri fecit quatuor: ſcire cupit ad eandem rationem ex ſexcentis aureis decem & octo mēſibus, quot aurei lucri fieri poſſunt. Nullum hæſitationis genus frequētius quàm huiuſmodi eſt inter mercatores, dum ſecū deliberant de quouis mercimonij genere, ſi pecunias ſuas in id impendant, quanto tēpore quātum lucri poterit acquiri. Ad hāc rem expedite diſcutiendam in primis illud fieri oportet quod faciēdum eſt, quoties in duabus proportionibus cū pecuniæ certæ diuerſitate temporis certi diuerſitas concurrit, vt pecuniæ quæque ſumma per ſuū tempus multiplicetur, vnúſque ita numerus vim vtriuſque cōplexus producatur ex ambobus, qui deinde cū lucro per ea parto comparetur. Quo fiet vt in ordinem proportiones ambæ redigi ſtatim poſſint, quēadmodū in proximis quæſtionibus diximus. Nā duas proportiones rem conſyderantes comperiemus, quantum alterius ambo extrema ſunt cognita, alterius verò alterum ſolum. Nam quæ proportio eſt inter decem aureos cū ſuo tempore trium menſium copulatos, & aureos ſexcentos cū ſuo tempore menſium decem & octo iunctos, cuius proportionis

ambo extrema ſunt cognita:eandem eſſe debere lucri quatuor aureorum noti ad lucrum illud quod ignoratū inquirimus. Et permutatim, quæ proportio eſt inter aureos decē connexos cum ſuo tempore trium menſium, & lucrum quatuor aureorum cognitū: eadem deprehendetur inter ſexcentos aureos coniunctos cum ſuo tempore menſium decem & octo & lucrum illud quod veſtigamus. Facta itaque aureorum decem multiplicatione per ſuum tempus trium menſium,ſurgunt triginta. Rurſúſque ſi in ſexcētos aureos ducantur decem & octo, ſuorum menſium numerus, prodibunt decem millia & octingenta. Poſtea quatuor proportionaliū regula nobis eam ſequentibus negotium explicabit, ſi primo loco triginta,ſecūdo decem millia & octingenta,tertio quatuor, quod lucrum nobis notum eſt,ponamus. Ita deprehendemus ex ſexcentis aureis menſibus decem & octo lucri fieri aureos mille quadringentos & quadraginta.

		Lucrum	Lucrum
30	10800	4	1440

Hic inueſtigatum eſt quantum accreſcet lucri.

Temporis inueſtigatio in lucro maiori ſecundum reſpectū temporis in lucro minori. Quæſtio XI.

FREQVENTER etiam mercatores inuertūt huiuſmodi quæſtionem, vt de tempore ſit hæſitatio. veluti ſi quiſpiam qui tribus mēſibus ex decē aureis lucri fecit quatuor, ſcire cupiat ad eandem rationem quot menſibus ex ſexcentis aureis,mille quadringentos & quadraginta lucri facere poteſt. In hac quæſtione lucrū in vtraque portione certum,tempus verò in altera adhuc ignoratū. Quare multiplicatio pecuniæ certæ per ignotum tempus fieri nequaquam poteſt, vt ambas proportiones ad quatuor proportionaliū regulam ſemel applicare ſufficiat. Alia igitur via tentanda eſt. Et rem conſyderantibus in primis ad exemplū lucri quatuor aureorū, quod ex decē aureis menſibus tribus creuit,excutiendum videtur, quantum lucri aurei ſexcenti menſibus tribus pariēt. Id quod facile diſcuti poteſt, ſi cogitemus duas hic proportiones reperiri: alterā de aureis decē ad ſexcentos:alteram de quatuor aureorum lucro ad lucrum illud quod exquirimus. Nam ſicut aurei decem ſe habent ad ſexcentos,ſic quatuor aureorum lucrum ad lucrum exquirēdum. Et permutatim,ſicut aurei decem ſe habent ad lucrū quatuor aureorum:ſic aurei ſexcenti ad lucrum inueſtigandū. Itaque

primo loco poſitis 10, ſecundo 600, tertio 4: per quatuor propor-tionalium regulam comperiemus ex 600 aureis, menſibus tri-bus lucri fieri 240. Deinde poſtquam compertum eſt quantum lucri menſes tres ex aureis ſexcentis afferunt: continuo deprehende-tur quot menſibus aurei mille quadringẽti & quadraginta ex ſex-centis lucri fieri poſſunt. Nam quæ proportio eſt aureorum ducen torum & quadraginta qui tribus mẽſibus lucri fiũt, ad aureos mil le quadringentos & quadraginta: eadem erit temporis trimeſtris ad numerum menſium inueſtigandum. Et permutatim, ſicut du-centi & quadraginta aurei qui trium menſium ſunt lucrum, ſe ha bẽt ad tres menſes: ſic aurei mille quadringenti & quadraginta ſe habebunt ad menſium numerum, de quo quæſitum eſt. Quamob-rem primo loco poſitis 240, ſecundo 1440, tertio 3: è veſtigio qua-tuor proportionalium regula denuo repetita nos edocebit, aureos 1440 ex 600 lucri fieri menſibus decem & octo.

		Menſes	Menſes
240	1440	3	18

Itaque tempus hoc de quo quæſitum eſt, particulatim inueſtigã dum erat, vt eius portione cognita facile exquireretur reliquum. Cætera id genus exempla ad eundem modũ excuti poſſunt. Quo fit manifeſtum, quatuor proportionalium regulam, quoniam ſe-mel tentata non ſatiſfacit, bis nonnunquam adeundã eſſe, vt cun-cta in lucem eruat.

Ponderis exploratio in panibus, quando pretium annonæ creſcit. Quæſtio XII.

QVANDO tritici modius nummis decẽ vẽditur, primariæ notæ panis, qui nummi pretiũ habeat, pẽdebit vncias quadraginta tres. Secundum eam rationem, quanti ponderis erit panis vnius num-mi, quando tritici modius tredecim nummis conſtat? Hic obſerua re oportet, vbique gentium receptam panificij legẽ eſſe, vt pro qua portione tritici pretium creſcit, pro ea panum vnius pretij põdus minuatur. Sicut enim annonæ copia panibus eiuſdem pretij & magnitudinem & pondus auget, ſic contrà annonæ caritas ab eo-dem pretio & põdus his & magnitudinem demit. Quocirca cum pro maioris pretij ratione diminutio ponderis ſit inueſtiganda, ea propter in proportionum comparatione, quod extremũ vtriuſque maius eſt, præponi debet, vt quæſtio ſit de minori alterius extre-mo quod ignoratur. Cũ autem altera proportio de tredecim nũ-

mis ad nummos decem,ambo extrema nota habeat,eam præcedere oportet. Altera verò de quadraginta tribus vncijs ad numerum ponderis inquirendum,ſequi priorem debet. Nam in hoc quæſito quantus reperitur exceſſus nummorum tredecim vltra decem,tā-tus erit quadraginta trium vnciarum exceſſus ſupra numerum pō-deris inueſtigandum, eadémque proportio. Et permutatim, ſicut 13 ſe habent ad 43,ſic decem ad numerum ponderis inquirendum ſe habere debent. Itaque ſi primam ſedem tredecim occupent, ſecundam decem,tertiam 43: quatuor proportionalium regula rem totam illuſtrabit. per quā deprehēdemus quando tredecim nummis tritici modius vænit, vnius nummi panē vncias triginta tres & vnam tertiam pendêre.

Pretium	Pretium	Pondus	Pondus
13	10	43	$33\frac{1}{3}$

Ponderis exploratio in panibus,quādo pretium annonæ decreſcit. Quæſtio XIII.

SI PANIS VNIVS nummi pendet vncias 43, quando tritici modius 10 nummis conſtat:quanti pōderis ad eam rationē erit panis vnius nummi, ſi tritici modius nūmis ſeptem væneat? Hic quia tritici pretium eſt imminutum, iuxta panificij leges pondus panis augebſtur. Quocirca qua proportione nummi 7 ſuperantur à 10,eadem 43 vnciæ ſuperabuntur à pondere panis inueſtigando. Et permutatim, ſicut 7 ſe habent ad 43: ſic 10 ad numerum ponderis inueſtigandum. Quare in proportione priore de 7 nummis ad nummos 10, extremum quod minus eſt præcedere: quod maius eſt, ſequi debet, vt poſterior proportio de panum pondere, deſinat in pondus maius. Ita digeſtis in ordinem proportionibus, per regulam quatuor proportionalium comperiemus vnius nummi panem pendere vncias $61\frac{3}{7}$ quando tritici modius ſeptē nūmis conſtat.

Pretium	Pretium	Pondus	Pondus.
7	10	43	$61\frac{3}{7}$

Lucri & damni regulæ.

PRIVS quàm ad alias quæſtiones progredimur, de lucro & dāno quaſdam regulas operæ pretium putamus adiungere. Et vt de lucro primum dicamus, Mercatores ad hunc modū ſecum quærere ſolent, Si ceræ pōdo centena aureis 12 quiſpiam emat, atque ea

deinde aureis 14 vendat: quantum lucri ex centenis accreſcet? Huiuſmodi quæſita ſic explicantur. Principio ſubducere oportet pretium quo res empta eſt, à pretio quo poſtea venditur: & numerus reſtans qui differentiã vtriuſque pretij continet, lucrum indicabit quod ex ſorte illa 12 obueniet, videlicet 2. Deinde ſi 12 quæ ſunt in ſorte, pariunt in lucrum 2, quantum lucri 100 reddent, per regulã de tribus notis quartum ignotum proferentibus pronum eſt execu tere. ducentes enim 2 in 100, procreabimus 200. quæ per 12 ſecãtes, relinquemus in ſectionis numero $16 \frac{2}{3}$. tantum lucri ex centenis accreſcet. Nam quæ proportio eſt inter ſortem 12 & ſortem 100, eadem eſſe debet inter lucrum quod ex 12 creuit, & lucrum quod ex 100 obuenire debet. Et permutatim, quæ proportio eſt inter ſortem 12, & lucrum 2, eadem inter ſortem 100 & eius lucrum quod inueſtigamus, eſſe debet. Similiter de denis, vicenis, tricenis, quadragenis, quinquagenis, vel millenis, quæri poſſet: ſed mercatorius ſupputandi mos maxime in centenis lucra & damna conſyderat. atque ideo de centenis exempla damus. In his autem mercatorijs regulis, quas nunc interſeremus, porportionum comparationem permutatim ſolum ponemus, mercatorum more: quãdoquidem per hanc cuiuis ſtudioſo recta earum comparatio ſeſe ſimul aperiet. Calculum recte cõfectum eſſe probabis, ſi proportionum ordinem cõuertas hoc modo, Si 100 quæ ſunt in ſorte lucri, faciũt $16 \frac{2}{3}$: 12 in ſortẽ collata lucrum reddent 2. Quòd ſi plus aut minus calculus afferat, error interuenit. Vel ſi cui magis placet, negocium ad regulam ſic applicabit, Si de 12 quæ ſunt in ſorte, fiunt 14 in ſortem & lucrum, quid ex 100 in ſortẽ datis ea ratione proueniet? ſequentes regulam deprehendemus $116 \frac{2}{3}$ in ſortem & lucrum accreſcere: à quibus ſi demus 100 quæ ſortem faciunt, ſuperſunt $16 \frac{2}{3}$. quæ lucrum ex centenis indicant. Tui arbitrij lector, eſto, vtram viam magis libeat ſequi. nam mercatores ipſi, alius hãc alius illam capeſſunt.

AD DAMNVM cognoſcendũ, id quod de lucro iam admonuimus, ſtudioſis ſuffecerit. nihil enim aliud intereſt, niſi quòd ſicut venditio ſuperans emptionis pretium, lucrum exuberare facit: ſic è cõuerſo venditio minoris facta ſortem vel diminuit, vel exhaurit. Verũtamen exemplum de eo quoque dabimus, Quando libra croci empta eſt aureis 3, venditáque 2: quæ iactura ex cẽtenis erit? Pretium quo res minoris vendita eſt, ab emptionis pretio quo pluris eſt empta, ſubtrahe. & ſupereſt 1, quod damnũ de tribus indicat,

Deinde ſi de 3 vnum perit, quantum detrimenti 100 afferent? per regulam datam exquire: reperies 33 $\frac{1}{3}$. Vel ſi magis libet alteram viam tentare, ſic potes, Si de 3 ſola 2 ſuperſunt, quid de 100 relinquetur? ducantur 2 in 100, fiunt 200: quæ ſi per 3 ſeces, exeunt 66 $\frac{2}{3}$ ea de 100 manent. differentia itaque inter 66 $\frac{2}{3}$, & 100 quæ eſt 33 $\frac{1}{3}$, venit in detrimentum.

Per lucrum notum ſortis ignotæ exquiſitio.

SAEPE mercatores ad nundinas ituri ſecum ad hunc modum ſupputare ſolent, Quanti pondo centena cuiuſpiam mercis, puta æris, æruginis, emenda ſunt, vt aureis 13 poſtea vendita ex centenis dena in lucrum pariant? Huiuſmodi quæſita expedies, ſi ſic tecum conſyderes, Qui ex centenis dena lucri vult facere, is 100 augere vſque ad 110 ſtudet: id quod ex pretio 13 efficere molitur. Itaque in illis 13, & ſors & lucrum latet: alioqui niſi ineſſet lucrum, dena ex centenis non lucrifierent. Ea propter cum per venditionem 13 aureis factam, lucrum ex centenis deſtinatum ſit acquiſitum: ſors quæ latet in 13, per regulam de tribus notis quartū ignotum proferentibus ſtatim ſic patefiet, Si 110 quæ ſortem & lucrum capiunt, prodeunt de ſorte 100: de qua ſorte naſcentur 13, quæ ſortem & lucrum tenent? Multiplicare oportet 100 in 13, & producentur 1300: quæ ſi per 110 ſecentur, numerus ſectionis 11 $\frac{9}{11}$ habebit: qui numerus ſortem illorum 13 demonſtrat. Atque ideo tanti emenda eſſent æris, æruginis pondo 100, vt poſtea 13 aureis vendita lucrum proportione denorū ad centena reddant. Si ſpecimen capere libet an recte ſit ſupputatum, proportionum ordinem conuerte hoc modo, Si de 11 $\frac{9}{11}$ quæ ſunt in mera ſorte, ſurgūt 13 ſors & lucrum: quid de 100 mera ſorte prodibit? tenta per regulam, & 110 inuenies: à quibus dempta ſorte 100, lucrū 10 ſupereſt. Sin plus aut minus redeat, erratū eſt. Aliud exemplum, Quanti lanæ mille pondo ſunt empta, quæ poſtea aureis 50 vendita lucrum proportione duodenorum ad centena pariunt? ad regulam datam ſic applicabis, Si 112 ante lucrum partum erant 100, quid ſecundū eam rationem 50 prius erant, cum quibus partum eſt lucrum? ſupputatio ſecundum regulam facta te docebit fuiſſe 44 $\frac{72}{112}$, quæ ſunt $\frac{9}{14}$.

Aliud exemplum, Quanti cōſtitit libra croci, quādo vncia nummis 9 vendita lucrum affert proportione denorū ad centena? Venciæ ſortem ſic deprehendes, Si 100 antequam acceſſit lucrum, erant 100: quid erant 9? inuenies fuiſſe 8 $\frac{2}{11}$. tot nummis vncia conſtitit.

Deinde vt libræ pretium excutias, multiplica vnciæ pretium $8\frac{2}{11}$ in 12, quòd tot ſint vnciæ in libra, & producuntur $98\frac{2}{11}$. tot nummis libra croci prius empta erat.

Per detrimentum notum ſortis ignotæ exquiſitio.

QVI gemmam emerat, vendidit eam poſtea aureis 100: & dum pecuniæ ſuæ rationem init, comperit ſe perdidiſſe 10 ex 100: quāti ab initio ſtetit gēma? Sic cōſyderare oportet, Qui 10 de 100 perdit, 100 ad 90 minuit: atque ideo ad inueſtigandā ſortem illorū 100, ad hunc modum cogitabit, Si 90 ante detrimentum erant 100, quid ſecundum eam rationem antè erant illa 100, ex quibus iactura facta eſt? ducantur 100 in 100, & ſurgent 10000: quæ ſecta per 90, reddunt 111 $\frac{1}{9}$: tanti gemma ab initio conſtitit. Verſo in contrarium proportionum ordine, capere experimentum licet an recte ſit ſupputatum, ad hunc modum, Si de 111 $\frac{1}{9}$ ſola 100 ſuperſunt, quid de 100 relinquetur? ſi regulam ſequare, deprehendes 90. ſi plus aut minus exit, error manifeſtus eſt.

ALIA etiam via per lucrum aut damnum ad ſortis partes redigendum, ſors ipſa ignota inueſtigari poteſt. Puta, ſi quiſpiā vendens nummis 20, de 100 lucrifaciat 10, & hæſitetur quanta ſit ſors: ad hunc modum per compendium res expedietur, Animaduertere oportet quota ſortis pars ſit lucrum: id quod ſtatim fit manifeſtum, ſi lucrum 10 per ſortem 100 diuiſum in minutias ſoluatur eo modo quo numeri minoris per maiorem admonuimus ſectionem fieri: ſic naſcentur $\frac{10}{100}$: quæ ad minimam nomenclaturam redactæ faciunt $\frac{1}{10}$: itaque qui ex 100 lucratur 10, decimā ſortis partem lucrifacit: quæ pars decima addita ad ſortem fit vndecima totius ſummæ. Atque ideo qui de lucro & ſorte $\frac{1}{11}$ capit, lucrum habet illius ſummæ: quod quādo ab ea ſubductum erit, ſola ſors reſtabit. Itaque de 20 ſumito $\frac{1}{11}$, & inuenies $1\frac{9}{11}$: tantulum ineſt lucri in exigua hac ſumma 20. Id autem ſi à 20 ſubducatur, reſtabūt pro ſorte $18\frac{2}{11}$. Ea ſors eſt illorum 20. Rem ita habere probabis, ſi proportionum ordinem conuertas hoc modo, Si de $18\frac{2}{11}$ fiunt 20, quid accreſcet de 100? tēta, & inuenies 110: ſubducito pro ſorte 100, reſtant pro lucro 10. Calculus itaque non errauit.

EADEM via per damnum ad ſortis partes redigendum, ſors ipſa poteſt excuti. Veluti ſi exemplo verſo, fingamus eum qui nummis 20 vendit, dena ex cētenis perdere. nam dānum 10 per ſortem 100 diuiſum profert $\frac{10}{100}$, quæ faciunt $\frac{1}{10}$. Illud itaque conſyderare

oportet,Qui perdit 10 ex 100,perdit de ſua ſorte $\frac{1}{10}$.Quo fit vt ſaluæ ſint ei reſtantes $\frac{9}{10}$: de quibus partibus ſi ſumas $\frac{1}{9}$, atque eam ad omnes partes relictas addas,inſtaurabis ſummam quæ fuit ante damnũ,& ſortem habebis quæſitã. Atque ideo in exemplo dato,ſi nũmis 20 vendens dena de centenis perdit,ea ratione vicena illa $\frac{9}{10}$ totius ſortis efficiũt.Quocirca ſi nonã partem de 20 ſumas, videlicet $2\frac{2}{9}$:atque eam ad 20 addas,fient $22\frac{2}{9}$:quæ ſumma ſortis ante iacturam erat.Nona autem illa pars $2\frac{2}{9}$ decima eſt totius ſortis,partémque eam addita inſtaurat,quæ de ſorte perierat.

Lucri ratio,ſi minoris quippiam fuiſſet emptum.

GLASTI emptor põdo millena certo pretio mercatus eſt?quæ ſi binis aureis minoris emiſſet,atque ea poſtea aureis duodenis vẽdidiſſet,ex cetenis dena feciſſet lucri:quæro quanti ab initio pondo glaſti millena ſteterunt?Huiuſmodi quæſita ſic expedies, Sortem illorũ 12 inueſtigare oportet eo modo quẽ dedimus, Si 110 erant 100 ante lucrum,quid ſecundum eam rationem ante lucrum adiunctum erant 12?ducantur 12 in 100,producũtur 1200:quæ ſecta per 110,reddunt $10\frac{10}{11}$. Ea fuiſſet ſors, ſi nihil aliud interueniſſet. Verũ quia adiectũ eſt, ſi duobus aureis minoris emiſſet,& 12 vendidiſſet, tum lucrũ accedere debuiſſe porportione denorũ ad centena: liquet ex hoc eũ pluris $10\frac{10}{11}$ emiſſe.Atque ideo 2 ad $10\frac{10}{11}$ addenda ſunt,vt fiant $12\frac{10}{11}$.tot aureis initio glaſti pondo 1000 conſtiterunt.Ex quo fit manifeſtum,ſi minoris duobus aureis emiſſet, danda fuiſſe $10\frac{10}{11}$: quæ ſors ea eſt quæ per venditionem ad 12 creſcens, dena ex centenis lucrifacit.

Damni ratio,ſi pluris quippiam fuiſſet emptum.

FRVMENTI emptor modios quaternos certo pretio emit,qui ſi pluris nummis quaternis quàm ſunt empti,conſtitiſſent,& vẽditi fuiſſent nũmis tricenis ſenis , dena de centenis fuiſſent perdita:quanti igitur cõſtiterunt modij quaterni? Principio ſicut proxime in lucro factum eſt,ſortẽ illorum 36 erues, hoc modo tecum cõſyderans,Si 110 erant 100,quid ſecundum eam rationem ante erant 36? ducantur 36 in 100,& fient 3600: quæ deinde ſecentur per 110, & prodeunt $32\frac{8}{11}$. tanti emi debuiſſent modij quaterni , vt venditione facta, nummis 36 dena ex centenis lucri fierent . Verum hic perdita ſunt 10 ex 100 : atque ideo ſicut in iactura antè docuimus, ſic conſyderabimus , Si 90 ante iacturam fuerunt 100,

quid ſecundũ eam rationem antè fuerunt 36? ducantur 36 in 100, & ſurgent 3600: quæ ſecta per 90, reddunt 40. tanti emi debuerunt, vt venditi nummis 36 damnum afferrent, detrahens dena ex centenis. Cæterum quia dictum eſt, ſi 4 nummi amplius ad pretiũ acceſſiſſent, tum iacturam illam denorum ex centenis ex venditione facta nummis 36 fuiſſe ſecuturam: 4 nummi à 40 demẽdi ſunt, quòd tanto minoris ſunt empti. ſic reſtant 36: quo pretio quaterni frumenti modij ab initio ſunt empti.

Lucri ratio, ſi pretium mutetur.

QVI SALIS modios ſingulos ſenis nummis vendit, octona ex centenis lucratur: quæri poteſt, ſi is mutato pretio, nummis octonis vendat, quantum lucri ex centenis acquiret? Multi in huiuſmodi quæſitis hallucinãtur, dum ſic proportiones comparant, Si 6 dant 8: quid dabunt 8? ducentes nanque 8 in 8, & productum per 6 ſecantes deprehendũt $10\frac{2}{3}$, quod lucrum ex centenis obuenire putant, ſi ſingulorum ſalis modiorum pretium à nummis 6 ad 8 mutetur. Hi toto errant cælo: nam 6 illa quæ iſti velut ſortẽ ponunt, & lucrum & ſortem continẽt. Itaque vbicunque in ſimilibus de lucro aut damno quæritur, primum ſors inuenienda eſt, quæ lucrum & damnum peperit: igitur ſortem & lucrum, quæ in ſex latent, ſors & lucrum, quæ in centenis nota ſunt, proferent in lucem, ſicut iam docuimus, hoc modo, Si 108 antequam acceſſit lucrum, erant 100, quid ſecundum eam rationem ante lucrum erant 6? ducantur 6 in 100 & fient 600: quæ per 108 ſecta in numero partitionis educunt $5\frac{5}{9}$. tãtum complecti debet ſors illorũ 6, vt poſtea ſex nummis facta venditio octona ex centenis lucri faciat. Iam verò in hoc themate, qui nummis 6 vẽdidit mutato pretio, nummis octonis vendere in animo habet, & ſcire cupit quantum lucri ex cẽtenis accreſcet. Id quod facile exquiri poteſt, ſi proportiones ſic formentur, Si $5\frac{5}{9}$, quæ ſunt ſors, pariunt 8 in ſortem & lucrum: quid 100 in ſortem collata dabunt? Scies è veſtigio, ſi 8 in 100 ducas, numerúmque productum diuidas per $5\frac{5}{9}$: quo fiet vt in numero ſectionis prodeant 144. tantum ſors illa 100 afferet in ſortem & lucrum. Igitur ſi ſortem 100 ab ea ſumma ſubducas, 44 pro lucro reſtant. tantum lucri ex centenis accreſcet, ſi ſinguli ſalis modij nummis 8 vendantur, qui antè 6 ſunt væniundati.

VEL SI mauis alia via rem ſtatim expedire, vt ſortem non exquiras, id fiet ad hũnc modum, Adde ad ipſa 100, lucrum ex his ac-

creſcens:ſummámque eam diuide per prius pretium quod lucrum illud peperit. Id autem quod in numero ſectionis prodibit, multiplica in poſterius illud pretium in quod fit cõmutatio. Ita numerus ex hoc productus, & lucrum de 100 natũ, & ſortem ipſam 100 complectetur: à quo lucro ſi ſortem 100 demas, lucrum de centenis ex nouo pretio obueniens reſtabit. Quæ via nunquam fallet. Puta in exemplo iam dato, vbi venditio ſenis nummis facta ex centenis octona in lucrum intulit: lucrum 8 ad ſortem 100 adde, fient 108. Eam ſummã diuide per prius pretium 6, quo lucrum illud acquiſitum eſt: ſic in numero ſectionis 18 prodeunt: quæ deinde in poſterius illud pretium 8, in quod fit commutatio, ducenda ſunt: ita producentur 144, quæ & lucrum & ſortem centenorũ capiunt: à quibus ſi 100 pro ſorte demas, reſtant pro lucro 44. tantum lucri de centenis accreſcet, ſi pretium à nummis ſenis ad octonos mutetur. Siue autem de centenis, ſiue de alio numero, puta quinquagenis, millenis, aut quouis alio, certũ lucrum quæratur, regula hæc inuariata manet: vim autem ſuam capit à multiplicatione & diuiſione, quæ à quatuor proportionalium regula ſuprà data, & ab vnitatis natura dependent. Porrò in diuiſione, ſicut vnitas ſe habet ad diuiſorem, ſic ſectionis numerus ad numerum diuidendum. Et permutatim, ſicut vnitas ſe habet ad ſectionis numerum, ſic diuiſor ad diuidendum. Similiter etiam fit in multiplicatione: nam ſicut vnitas ſe habet ad multiplicatorem, ſic multiplicandus ad numerum producendũ. Et permutatim, ſicut vnitas ſe habet ad multiplicandum, ſic multiplicator ad numerum producẽdum. Igitur eſto 6 habeant 1 in ſortem, ea ratione 108 haberent 18: id quod ſic exquires, Si 6 in ſorte & lucro prodeãt (fingamus) de 1, de quo naſcentur 108 quæ ſunt in ſorte & lucro? ducatur 1 in 108: & idem numerus producetur. Is deinde diuidatur per 6: & numerus ſectionis 18 proferet, quæ ſecundum eam rationem ſors eſſe deberent illorum 108. Iam verò pretio mutato, ſi ſcire voles quantum reddent 18, ſic inueſtigabis, Si de vno fiunt 8, quot de 18 fient? multiplicentur 8 in 18, & producentur 144: quæ ſortem & lucrum centenorum tenebunt.

Damni ratio, ſi pretium mutetur.

DAMNI ratio per eandem regulam ad eundem modum excutietur, præterquam quòd ſicut lucrum additur ſorti, ſic iactura de ſorte ſubducitur, & numerus reſtans per prius pretium, quod de-

trimētum attulit,ſecatur. quod autem in numero partitionis reperietur, ducere oportet in pretium illud in quod fit cōmutatio: ſic numerus productus & ſortem indicabit & damnū,ſiue de centenis quæratur,ſiue de millenis,ſiue de quouis alio numero iacturam terminante. Exempli gratia,qui 6 nummis vēdit, duodena de centenis perdit:quid iacturæ ex centenis ſuſtinebit,ſi pretio diminuto 4 nummis vendat? de 100 ſubduci debent 12, & reſtabūt 88: quæ ſecentur per prius illud pretium 6,quod iacturam peperit, & prodibunt in ſectionis numero 14 $\frac{2}{3}$. Ea autem deinde multiplicentur in minus pretium 4 in quod fit cōmutatio:& 58 $\frac{2}{3}$ ſurgēt, quæ ſorte & iacturam centenorum demōſtrabunt. quot itaque ab eo numero vſque ad 100 deſunt, totidem de centenis in iacturam veniunt:ea autem ſunt 41 $\frac{1}{3}$. Vel ſi per exquiſitionem ſortis illorum 6 magis id ſcire libet:ſic tecum conſyderans rem ſtatim explicabis, Qui nummis 6 vendendo de 100 perdit 12, is 100 ad 88 minuit:quæ iactura naſcitur ex nummis illis 6. Sic igitur ratiocinare, Si 88 ante iacturam erant 100,quid ſecundum eam rationē antè erant 6 quæ damnum attulerunt? tenta per datam regulam, & inuenies 6 $\frac{9}{11}$. ea ſors erat illorū 6. Idque ita eſſe probabis, ſi proportionum conuertas ordinem hoc modo, Si 6 $\frac{9}{11}$ minuuntur ad 6,quantum ſecundum eam rationem decreſcent 100? experire per regulam,& 88 relicta deprehendes. Iam verò mutato pretio,ſi ſors illa 6 $\frac{9}{11}$ minuatur ad 4,quid iacturæ ex 100 erit? data regula è veſtigio aperiet. Nam ſi 4 in 100 ducantur,fient 400: quæ ſi per 6 $\frac{9}{11}$ ſecentur,numerus partitionis 58 $\frac{2}{3}$ habebit. Quod autē ſupra eum numerum vſque ad 100 deeſt,in iacturā (vti diximus) venit: vtraque igitur via rem eodem perducit.

Quomodo pretium ſtatuatur ad lucrum quoduis parandum.

FREQVENTER etiam mercatores in merce aliqua,pondere, numero aut menſura vendi ſolita; poſt complures expenſas terra marique ſupra emptionis pretium factas,in vectigalia,naulū, vecturam,miniſtrorum victum,cæteráque id genus, certum ſibi lucrum de quouis pōdere, numero,aut mēſura deſtinant: ſecúmque deliberant,quodnam pretium ſtatuant in ſingula pondera,numeros aut menſuras,vt lucrū illud accreſcat. Id quod fiet ad eum modum, quem hoc exemplo monſtrabimus, Piperis pondo millena in Luſitania nummorū 10000 ſunt empta: próque his vectigal illic penſitatum nummi 1000. naulum deinde illinc in Britannias

conſtitit 300. Ibi rurſus aliud vectigal exactũ 500. Vectura deinde terra facta nummis ſtetit 200. Miniſtri in eam negotiationem miſſi impenſa 2000. Mercator aduecta merce, de ſingulis piperis libris ſupra omnes impenſas nummos 4 lucrifacere deſtinat. Cæterum hæſitat, quonam pretio piperis libram vendat, vt lucrum illud accedat. Rem ſic expediemus: pretium emptionis, vectigal, naulum, iterum vectigal, vecturam terra factam, miniſtri impẽſam, omnia in vnam ſummam colligere oportet, & ſurgent 14000: quibus etiamnum lucrum nummorum 4 deſtinatũ in libras ſingulas debemus addere, videlicet nummos 4000, ſic creſcunt 18000. Quam ſummam in vniuerſum mercator & pro ſorte & pro lucro totius negotiationis ſibi reddi cupit. Atque ideò quatuor proportionalium regula, quam de tribus notis quartum ignotum proferentibus ſuprà dedimus, è veſtigio pretiũ vnius libræ patefaciet. Nam ſicut vniuerſæ piperis libræ aduectæ ſe habent ad totam illam ſummam pretium atque lucrum omnium complectẽtem, ſic vna piperis libra ad ſuum pretium & ſuum lucrum ſe habere debet. Quocirca ſi 1 ducatur in 18000, idem numerus producetur: qui ſi per numerum vniuerſarum piperis librarum videlicet 1000 ſecetur, numerus ſectionis pretium vnius libræ nummos 18 continebit. Ad eundem modum pretium & lucrum ſtatuere licet in his, quæ numero aut menſura vendi conſueuerunt.

Collatio in iactu mercium facto ob nauem in tempeſtate ſeruandam. Quæſtio XIIII.

SEX MERCATORES emptis mercibus nauem onerarunt. Primi merces conſtiterunt aureis viginti quinque, Secundi quadraginta, Tertij quinquaginta ſex, Quarti ſexaginta quatuor, Quinti ſeptuaginta quinque, Sexti centum. Graui deinde tempeſtate inter nauigandum orta, cum nauis onere nimio depreſſa crebris fluctibus penè obrueretur, nautæ ſaluti ſuæ conſulentes, cauſa leuãdæ nauis eijciunt in mare grauiſſimas quaſque merces, quæ pro cẽtum & viginti aureis alioqui valebant. Quo iactu factũ eſt, vt ſeruata nauis reliquum onus in portum deſtinatum adueheret. Mercatores, quorum erant eiectæ merces poſtulant, vt cæteri quorum bona ſeruata ſunt, iacturam cõmuniter ſuſtineant. Id quod illis omnibus æquum viſum eſt. Cæterum ambigunt quonã modo pro rata cuiuſque bonorũ portione collatio ea fieri debeat. Hãc hæſitatione explicaturis ſtatim nobis occurrũt duæ proportiones: altera

de mercium omniũ in nauem impoſitarũ ſumma ad cuiuſq; merces impoſitas.altera quæ ſecundũ illam adaptari debet,de cõmuni omniũ iactura ad cuiuſque iacturã ſuſtinendã. Nam ſicut omniũ merces impoſitæ ad cuiuſque merces ſe habent,ita omniũ iactura ad cuiuſque iacturã ſe habere debet. Et permutatim , ſicut omniũ merces impoſitæ ſe habent ad cõmunem omniũ iacturam: ita cuiuſque impoſitæ merces ad iacturã cuiuſque. Quocirca hæſitatio hæc per quatuor proportionaliũ regulã ſic facile explicatur,vt primo loco omniũ mercium æſtimationẽ ſimul additã ſtatuamus.Secundo loco vniuſcuiuſque merciũ æſtimationẽ ſeparatim aliã ſub alia notatã.Tertio loco cõmunem iacturam,ad hunc modum,

	25		Primus 8	& $\frac{120}{360}$ quæ faciunt $\frac{1}{3}$
	40		Secũdus 13	& $\frac{120}{360}$ quæ faciunt $\frac{1}{3}$
	56		Tertius 18	& $\frac{240}{360}$ quæ faciunt $\frac{2}{3}$
360	64	120	Quartus 21	& $\frac{120}{360}$ quæ faciunt $\frac{1}{3}$
	75		Quintus 25	
	100		Sextus 33	& $\frac{120}{360}$ quæ faciunt $\frac{1}{3}$

Deinde ſi regulã ſequamur,deprehendemus primũ mercatorẽ 8 & $\frac{120}{360}$ quæ faciunt $\frac{1}{3}$,conferre debere.Secundum 13 & $\frac{120}{360}$: quæ faciunt $\frac{1}{3}$.Tertium 18 & $\frac{240}{360}$,quæ faciunt $\frac{2}{3}$. Quartum 21 & $\frac{120}{360}$, quæ faciunt $\frac{1}{3}$. Quintum 25. Sextum 33 & $\frac{120}{360}$, quæ faciunt $\frac{1}{3}$. Quòd ſi ſcire cupis num calculus errauit , ſingulorũ collationes ſimul adde:quæ ſi vniuerſæ collectæ reſpondent communi iacturæ ,recte ſupputatum eſt,alioqui error interuenit.

Bonorum inter creditores diuiſio. Quæſtio XV.

SI CVIVSQVAM,qui ſoluendo nõ eſt,bona inter multos creditores pro cuiuſque debiti rata portione diuidi ideo debẽt, vel q; is foro cedat, vel quòd ſolũ vertat, vel quòd poſt mortẽ eius propter æs alienũ non adeatur hæreditas : ad eundẽ modum, quẽadmodum in iactu mercium de collatione faciẽda diximus, partitio fieri debet:cuius rei,vt exemplũ demus, Eſto,creditores octo fuerint,quibus debẽtur mille, primo quindecim , ſecũdo vigintiqua-

tuor, tertio triginta duo, quarto quinquaginta quatuor, quinto ſexaginta, ſexto ſeptuaginta quinque, ſeptimo octoginta ſex, octauo centū: bonáque debitoris, quæ inter eos ſunt diſtrahenda, non tranſcēdant centū & quinquaginta. Rem cōſyderātes, duas proportiones ſtatim deprehēdemus: vnā de coaceruatis debitis omnibus, quæ debētur creditoribus vniuerſis, ad id quod cuique debetur: alteram de vniuerſis debitoris bonis ad eā portionē quā quiſque creditor habiturus eſt. Nā ſicut coaceruata debita, quæ debētur vniuerſis, ſe habēt ad illud debitū quod vnicuique debetur, ſic vniuerſa debitoris bona ad eam bonorū partem quā quiſque creditor habiturus eſt, ſe habere debent. Et permutatim, ſicut coaceruata debita quæ debentur vniuerſis, ſe habēt ad vniuerſa debitoris bona, ſic illud debitū quod cuique debetur, ad eam bonorū portionem quā quiſque creditor habiturus eſt. Quare quatuor proportionalium regula rem reddet expeditam, ſi primo loco omnia debita ſimul addita, quæ creditoribus vniuerſis debētur, ponamus. Secūdo loco illud debitū, quod cuique debetur, aliud ſub alio ſeorſum annotatū. Tertio loco vniuerſorū debitoris bonorū ſummā. Deinde faciētes id quod iubet regula, cōperiemus primo creditori obuētura quinque & $\frac{20}{446}$: Secūdo, octo & $\frac{32}{446}$. Tertio, decem & $\frac{340}{446}$. Quarto, decem & octo $\frac{72}{446}$. Quinto, viginti & $\frac{80}{446}$. Sexto, vigintiquinque & $\frac{100}{446}$. Septimo, vigintiocto & $\frac{412}{446}$. Octauo, triginta tria & $\frac{282}{446}$. Certū ſpecimen erit nihil erraſſe calculū, ſi partes cuique obueniētes ſimul additæ reſpondeant vniuerſis debitoris relictis bonis.

	15		Primus	5 $\frac{20}{446}$
	24		Secūdus	8 $\frac{32}{446}$
	32		Tertius	10 $\frac{340}{446}$
	54		Quartus	18 $\frac{72}{446}$
446		150		
	60		Quintus	20 $\frac{80}{446}$
	75		Sextus	25 $\frac{100}{446}$
	86		Septimus	28 $\frac{412}{446}$
	100		Octauus	33 $\frac{282}{446}$

Poſthumi hæredis inſtitutio. Quæſtio XVI.

MORITVRVS quiſpiam, cui grauida erat vxor, & mille aureorum hæreditas, ſic teſtamentum condidit, Si vxor mea filium pariet, is ex beſſe mihi hæres eſto: vxor autem ex triente. Sin vxor mea pariet filiam, vxor ex beſſe mihi hæres eſto, filia verò ex triente. Vxor deinde geminos maſculum & fœminam vno partu enixa eſt. ambigitur, quonā modo diuidenda ſit hæreditas, vt defuncti voluntas non infringatur. Huiuſmodi hæſitationem altius conſyderantes in primis deprehendimus teſtatoris voluntatem eſſe, vt filius altero tanto amplius habeat, quàm vxor: itidémque vxor altero tanto amplius, quàm filia. Itaque cū filij pars ad portionē matris dupla eſſe debeat, quòd is duas hæreditatis partes, mater tertiam ſit habitura: matríſque pars item ad portionem filiæ, quòd ea duas partes cōſequutura ſit, & filia tertiā: eo fiet vt pars filij ad filiæ portionē quadrupla ſit futura. Quāobrem numerus aliquis exquirēdus eſt, qui ſimplū, duplum, & dupli duplū, quod quadruplū ad ſimplum eſt, habeat: vt in totidem partes diuidi poſſit hæreditas. Minimus autem numerus qui partes eas habeat, capiēdus eſt, quo facilior ſit ſupputatio. Is autem eſt ſeptenarius: nam vnum duplicatum profert duo: eáque iterū duplicata, quatuor: quæ cuncta ſimul addita faciunt ſeptē. Et quoniam mille aurei in ſeptem partes diuidendi ſunt, quarum quatuor filius habere debet, duas mater, vnam filia: quot aurei cuique obueniēt, ſtatim excutiemus, ſi animaduertamus, quæ proportio eſt omnium partium ſimul additarum, hoc eſt ſeptenarij numeri ad cuiuſque portionem, eandem mille aureorum eſſe debere ad eum numerum qui cuique obueniet. Et permutatim, quæ omnium partium ſimul additarū proportio eſt ad mille aureos, eandem eſſe portionis cuiuſque ad numerum aureorū inueſtigandum. Ad regulam igitur quatuor proportionalium quæſitum applicantes, è veſtigio rem totam explicabimus, ſi primo loco, omnium partium numerū ſtatuamus, Secundo cuiuſque partem, aliam ſub alia notatam, Tertio loco mille aureos, quæ tota eſt hæreditas, ad hunc modum,

	4		Portio filij	$571 \frac{3}{7}$
7	2	1000	Portio vxoris	$285 \frac{5}{7}$
	1		Portio filiæ	$142 \frac{6}{7}$

Deinde regulam ſequentes inueniemus filij partem capere 571 & $\frac{3}{7}$. Matris 285 & $\frac{5}{7}$. Filiæ verò 142 & $\frac{6}{7}$. Specimen certum erit nihil erratum eſſe, ſi omnium partes ſimul additæ toti hæreditati reſpondeant.

QVÒD SI vxor vno partu tres filios & duas filias æderet (id quod in AEgypto eſt frequens, vt mulieres quinquegeminos pariant) ad eandẽ rationẽ partitio fieri deberet, vt quilibet filius ad portionẽ matris duplum haberet, itidémque mater ad portionem cuiuſque filiæ. Quocirca numerus capiẽdus eſſet qui bina ſimpla, bina & ſimpli duplũ, atque ſimpli terna quadrupla haberet. Minimum autẽ numerum, qui bina ſimpla, & ſimpli duplũ habeat, cõperies quatuor: quíque terna quadrupla capiat, duodecim. ea ſimul addita fiunt ſexdecim: in quot partes hæreditas eſſet diuidenda, vt ex his quilibet filius quaternas, mater duas, filiæ vnicas accipiant. cætera ſecundum regulam quatuor proportionalium expediãtur.

Hæredum inſtitutio in partibus deſignatis. Quæſtio XVII.

ANIMAM agens quiſpiam, cui quinque erant filij, & trium millium aureorum hæreditas, huiuſmodi teſtamentum fecit, Primus filius meus natu maximus ex ſemiſſe mihi hæres eſto, Secundus natu proximus ex triente, Tertius ex quadrante, Quartus ex quinta parte, Quintus ex ſextante. Ambigitur quonam modo diuidẽda ſit hæreditas. Nam ſi teſtatoris verba ipſa ſequemur, vt primus filius hæreditatis dimidium, mille & quingentos aureos: ſecundus tertiam partem, mille aureos accipiat: tunc tertius integram quartam, ſeptingentos & quinquaginta aureos conſequi nequaquam poterit, cum ſoli ſuperſint quingenti. quartus autem filius, cui debetur pars quinta: & quintus, cui ſexta, nihil omnino habituri ſunt. Igitur cũ filij partes illas hæreditatis à patre deſignatas conſequi integras non poſſint, aliæ partes minores inueſtigandæ ſunt, quæ deſignatis illis pro portione reſpondeant, vt ſingulis filijs ſatiſfiat. Principio ergo exquirẽdæ ſunt partes deſignatæ, quæ facile inueniuntur ſi relictam ſummam per ſingulos ſeorſum denominatores diuidas. Ita cuiuſque ſectionis numerus partem per denominatorem à patre deſignatam continebit. Quo fiet vt dimidium inueniamus, aureos mille & quingentos: tertiam partem, aureos mille: quartam, ſeptingentos & quinquaginta: quintam, ſexingentos: ſextam, quingentos: qui numeri ſeorſum alius ſub alio debent annotari, vt eorum proportione alij numeri minores

inueſtigentur ex ſumma trium millium in hæreditate relicta. Hos autem numeros ſi filij haberent, ipſis ſuo cuiuſque voto ſatiſfactũ eſſet, nec amplius petere ex hoc patris teſtamento poſſent. Numeri verò hi collecti in vniuerſum, faciunt quatuor millia trecenta quinquaginta: qui numerus partes à patre deſignatas vniuerſas habet. Veruntamen quia hæreditas relicta ſumma minori clauditur, nempe trium millium: videndum quonam modo ſecũdum teſtatoris voluntatem facienda ſit partitio. Qua in re ſi poſt iam cognitas partes deſignatas penitius hæſitationẽ ſcrutemur, proportiones duas comperiemus: vnam de ſimul additis partibus vniuerſis deſignatis ad cuiuſque filij partem à patre deſignatam: alteram de vniuerſa relicta hæreditate ad illam eius partem inueſtigandam, quam quiſque filius pro partis deſignatæ portione accepturus eſt, quæ ſecũdum illam priorem formari debet. Etenim quæ proportio eſt inter vniuerſas partes deſignatas ſimul additas & cuiuſque filij partem à patre deſignatam, eadem inter vniuerſam relictam hæreditatem & illam eius partem exquirendam, quam quiſque filius pro partis deſignatæ portione habiturus eſt, exiſtere debet. Vel ſi libet permutatim ea comparare, Sicut vniuerſæ partes deſignatæ ſimul additæ ſe habẽt ad vniuerſam relictam hæreditatem, ſic cuiuſque filij pars à patre deſignata ad illam hæreditatis partem exquirendam, quam quiſque filius pro partis deſignatæ portione accepturus eſt, ſe habere debet. Poſtquã igitur primo loco partes vniuerſæ deſignatæ ſimul additæ ſunt notatæ, Secundo cuiuſque filij partes, quas pater deſignauit, alia ſub alia ſeorſum, Tertio relictæ hæreditatis ſumma: continuo quatuor proportionalium regula rem inuolutam explicat: ex qua deprehendes, primo filio obuenire $1034\frac{2100}{4350}$. Secundo $689\frac{2850}{4350}$. Tertio $517\frac{1050}{4350}$. Quarto $413\frac{3450}{4350}$. Quinto $344\frac{3600}{4350}$.

Probatio certa eſt recte ſupputatum eſſe, ſi poſt hæreditatis partitionem, omnium filiorum partes trium millium aureorum ſummæ reſpondeant. Hæſitationem hanc extricantes vulgarem ſupputationum morem ſecuti ſumus. Cæterum qui Arithmeticæ penetralia magis callent, breuiori via ſeſe expediunt. Eam autem in ſequenti quæſtione trademus.

	1500		Primus	$1034 \frac{2100}{4350}$
	1000		Secūdus	$689 \frac{2850}{4350}$
4350	750	3000	Tertius	$517 \frac{1050}{4350}$
	600		Quartus	$413 \frac{3450}{4350}$
	500		Quintus	$344 \frac{3600}{4350}$

Quæſtio XVIII.

QVINQVE ſocij tria aureorum millia lucrifacta diuidere inter ſe de cōpacto ſic cupiunt, vt primus vnā partem ſecundam ſibi habeat, Secundus vnā tertiam, Tertius vnam quartā, Quartus vnam quintā, Quintus vnam ſextam. Cæterū hæſitant quonā modo iuſta partitio fiet. Ad huiuſmodi quæſtiones explicandas numerum aliquē exquirere oportet, qui partes denominatas omnes complectatur. Is autem eſt minimus numerus, quem partium denominatores numerant: qui quemadmodū exquiratur, ſuperiori libro edocuim⁹. Itaque in hoc quæſito minimus numerus, qui partes propoſitas habeat, cōperietur ſexaginta. In quo numero, ſingulæ partes propoſitæ ſeorſum inquirēdæ ſunt. Id quod per ſectionem ipſius numeri ſexagenarij, per earum ſingulas ſeparatim expeditur. Quo fiet, vt partitionis numerus partem de ſexaginta ſecundam, triginta inueniat, tertiam viginti, quartam quindecim, quintam duodecim, ſextam decem: qui numeri in vnum collecti omnes octoginta ſeptem creant. Ad harum partium exemplum, quæ de ſexaginta ſunt erutæ ſingulorū portiones, de ſumma triū millium aureorum diuidenda formandæ ſunt. Nam ſicut omnes illi ſectionis numeri, quos ſexaginta diuiſa pariunt, ſimul additi ſe habent ad eorum ſingulos: ſic ſumma trium millium aureorum diuidenda, ad illam ſummam, quæ cuique ex partitione debetur, ſe habere debet. Et permutatim, ſicut omnes illi ſectionis numeri de ſexaginta eruti ſe habent ad tria aureorum millia diuidēda: ſic vniuſcuiuſque ſectionis numerus ad illam ſummam, quam quiſque ex partitione conſequetur, ſe habere debet. Itaque ſi primam ſedem omnes ſectionis numeri de ſexaginta prodeūtes, ſimul additi teneant, qui ſunt 87, Secundam ſinguli eorum, alius ſub alio ſeorſum annotati, Tertiam trium millium aureorū ſumma diui-

denda: quatuor proportionalium regula negotium extricabit.

	30		Primus	$1034\frac{42}{87}$
	20		Secũdus	$689\frac{57}{87}$
87	15	3000	Tertius	$517\frac{21}{87}$
	12		Quartus	$413\frac{69}{87}$
	10		Quintus	$344\frac{72}{87}$

Partes ex ſectione cuique obueniẽtes ſummæ diuidendæ reſpõdebunt, ſi recte proceſſit calculus. De induſtria hic eandẽ ſummã quæ in proximo quæſito erat, in eaſdem partes ſecandã propoſuimus, vt lector ſciret quanto breuius per minores numeros, quàm per maiores, eadem res expediri poſſit: id quod propter faciliorem tum multiplicationem, tum ſectionem euenire neceſſum eſt.

Quæſtio XIX.

QVI quatuor amicos habebat, eorum primo nouem aureos in teſtamento legauit, Secũdo viginti quatuor, Tertio tanto amplius quàm ſecundo dedit, quantum ſecundus ſupra primum haberet; Quarto tanto amplius quàm tertio, quantũ tertius ſupra ſecundũ caperet. quæritur quantũ tertius & quartus cõſequentur. Hæſitationem conſyderantes, proportionalitatẽ in ea continuam deprehendemus. Nam ſicut primi legatum ad legatum ſecũdi ſe habet, ſic ſecundi ad legatum tertij ſe habere debet. Et rurſus, ſicut ſecũdi legatum ſe habet ad legatum tertij, ſic tertij ad quarti legatum. Atque è conuerſo, ſicut quarti legatum ſe habet ad legatum tertij, ſic tertij ad legatum ſecundi. Et rurſus, ſicut tertij legatum ad ſecundi ſe habet, ſic ſecundi ad primi legatum ſe habere debet. Quamobrem ſecundum trium proportionalium regulam ſuprà à nobis enarratam res explicari debet, vt ſecundi legatum, quod in proportionum comparatione bis repetitur, in ſe multiplicetur, & numerus inde procreatus per primi legatum diuidatur. Ita ſectionis numerus tertij legatum in lucem proferet aureos 64. Et rurſus tertij legatum, quod in proportionum continuatione bis repetimus, in ſe multiplicandum eſt, & numerus ex hoc enatus per ſecundi legatum diuidendus. Quo fiet, vt ſectionis numerus quar-

ti legatum manifeſtet aureos 170 $\frac{16}{24}$, quæ ſunt $\frac{2}{3}$ vnius aurei.

9 24 64 170 $\frac{16}{24}$, quæ ſunt $\frac{2}{3}$.

Quæſtio XX.

INTER tres, aureorum ducentorum diuiſio de compacto fieri debet, vt primus triplo plus quàm ſecūdus habeat, ſecundus quadruplo plus quàm tertius: Quonam modo, ſecundum pactum fiet iuſta partitio? Facile id extricabitur, ſi à tertio qui minimā partem accepturus eſt, retrogrado ordine incipias: cui aſſignes, ſi libet, vnitatem. Et quia in quadruplo ſecundus tertium ſuperabit, tertij partem quadruplica, & enaſcentur quatuor, quæ pars erit ſecundi. At quoniam primus triplo amplius quàm ſecundus conſequetur, ſecundi pars triplicāda eſt, & prodibunt duodecim. ea pars erit primi. Hi numeri ſimul additi creant ſeptendecim, ſecundum quem numerum ſummæ propoſitæ partitio fiet: in totidem nanque partes aurei ducenti diuidendi ſunt, vt ex his primus 12, ſecundus 4, tertius vnam habeat. Confeſtim verò quis aureorū numerus cuique cedet, ſecundum regulam quatuor proportionalium excutiemus, ſi primo loco partes omniū ſimul additas ponamus. eæ ſunt 17: ſecundo cuiuſque partem, aliam ſub alia ſeorſum annotatam: tertio ſummam 200 aureorum diuidendam. Nam quæ proportio eſt omnium earum partium ſimul additarum ad cuiuſque partem, eadem erit ſummæ diuidendæ ad eam quam quiſque habiturus eſt. Et permutatim, quæ proportio eſt ſimul additarum omnium partium ad ſummam diuidēdam, eadem erit cuiuſque partis ad eam ſummam quam quiſque conſequetur.

	12		Primus	141 $\frac{3}{17}$
17	4	200	Secundus	47 $\frac{1}{17}$
	1		Tertius	11 $\frac{13}{17}$

Si vis probare ſecundum pacta proceſſiſſe calculum, partem primi in tria diuide: & ſectionis numerus ſecundi partē educet. Rurſus ſecūndi partem in quatuor: & numerus partitionis tertij partem proferet.

Quæſtio XXI.

TRES inter ſe partiri centum aureos cupiunt, quorum primus

vnam tertiam & vnam quartam habere poſtulat, Secundus vnam quartam & vnam quintam, Tertius vnam quintā & vnam ſextā: Quæritur quantum cuique ex partitione obueniet? Ad huiuſmodi quæſtiones ſoluendas, in primis minimus numerus exquirendus eſt, qui omnes cuiuſque denominatores ſimul capiat. Is autē eſt ſexaginta. Ex quo numero, quæ partes vnicuique ex partitione prouenire deberent, ſi is diuidendus eſſet, prius inueſtigare oportet: id quod facile deprehendi poteſt, diuidendo numerum ipſum ſexagenarium ſeparatim per ſingulos partiū denominatores. Deinde partes ex numeris ſectionum inuētæ, ſeorſum addēdæ ſunt, vt ſciamus quantū cuique partes ſuæ cōiunctæ dabūt. Ita numerus partitionis de ſexaginta partem tertiam 20, partem quartā 15, quæ per additionem educunt 35, primo deberi patefacit. Partē verò quartā 15, & partem quintā 12, quæ per additionem faciunt 27, ſecundo deberi. Partem autem quintam 12, & partem ſextam 10, quæ per additionem procreant 22, tertio deberi. Ad quarum partium de ſexaginta erutarū exemplar, poſtquam numeri ex his collecti ſunt additi: ſinguli portiones ſuas de ſumma centum propoſita facile conſequentur. Etenim ſi primo loco numeri illi, ex cuiuſque partibus ſeparatim per additionem numerorum ſectionis iam collecti, videlicet 35, 27, & 22, mox omnes in vnum rūrſus additi ſtatuantur, vt ſint 84: Secundo ſinguli illi ſeparatim per additionem numerorum ſectionis collecti, alius ſub alio ſeorſum annotati: Tertio ſumma centum, quæ diuidenda eſt: facile per quatuor proportionalium regulā res tota extricabitur. Nam ſicut in vnum coaceruati omnes illi cuiuſque numeri, qui per additionem numerorum ſectionis ſeorſum collecti erant, ſe habent ad ipſorū ſingulos: ſic centum quæ diuidenda ſunt, ad illam ſummam quæ cuique ex partitione debetur, ſe habere debent. Et permutatim, ſicut in vnum coaceruati omnes illi cuiuſque numeri, qui per additionem numerorum ſectionis ſeorſum collecti erant, ſe habent ad centum quæ ſunt diuidēda: ſic ſinguli cuiuſque numeri per additionem numerorū ſectionis ſeorſum collecti, ad illam ſummam, quam cuique partitio aſſignabit, ſe habere debent.

	35		Primus	$41\frac{56}{84}$ quæ ſunt $\frac{2}{3}$
84	27	100	Secundus	$32\frac{12}{84}$ quæ ſunt $\frac{1}{7}$
	22		Tertius	$26\frac{16}{84}$ quæ ſunt $\frac{4}{21}$

Quæſtio XXII.

QVATVOR inter ſe diuidere ſexcentos aureos ſic cupiunt: vt primus duas tertias, atque vnà nouem aureos habeat: Secũdus tres quintas, & aureos octo: Tertius quinque ſextas, & aureos ſeptem: Quartus ſeptem octauas, & aureos ſex: ambigitur, quantum cuilibet conferet partitio. In primis minimus numerus, qui omnes has denominationes capiat, inquirẽdus eſt. Is autem eſt centum & viginti. Quem numerum ſi per ſingulas denominationes ſeces, inuenies tertiam eius partem, quadraginta: Quintã, viginti quatuor: Sextam, viginti: Octauam, quindecim. Cæterum quoniam primus duas tertias habiturus eſt, quadraginta illa quæ partem tertiam faciũt, duplicare oportet, & ſurgent octoginta. qui numerus in duabus tertijs reperitur. Et quia vltra duas tertias, primo etiam nouẽ aurei accedunt: nouem addenda ſunt ad 80, vt fiant 89. ea ſumma eſt eorum, quæ primus habere poſtulat. Porrò quia ſecundus tres quintas habebit, viginti quatuor quæ quintam faciunt, triplicanda ſunt, & fiẽt ſeptuaginta duo. qui numerus in tribus quintis reperitur. Et quia vltra tres quintas octo aurei ſecũdo debentur, adduntur octo, quæ creant 80. ea ſumma eſt eorũ, quæ ſecundus flagitat. Præterea quia tertius quinque ſextas eſt conſequuturus, viginti quæ ſextam implent, in quinque ducere eſt opus, & prodibunt centũ. qui numerus in quinque ſextis reperitur. cui, quia tertius ſeptem aureos amplius petit, ſeptem adiungantur: & fient cẽtum & ſeptem. quæ ſumma eſt eorũ, quæ tertio debentur. Quartus verò quoniam ſeptem octauas poſtulat, quindecim quæ octauam creant, ducere in ſeptem oportet. & enaſcentur centũ & quinque. qui numerus in ſeptem octauis deprehenditur. cui numero (quia quartus ſex aureos adhuc exigit) addere oportet ſex, & ſurgent centum & vndecim. quæ ſumma eſt omniũ, quæ quartus habiturus eſt. En tibi numeros quos quiſque habere poſtulat: quos omnes ſi ſimul addas, ſurgent trecẽta octoginta ſeptem. Ad cuius ſummæ exemplum ex partibus ſic collectæ, ſexcentorum aureorũ partitio fieri debet. Nam ſicut omnes numeri, qui in partibus denominatis ſeorſum reperiuntur, vnà cum cuiuſque aureorum acceſſione, ſimul additi ſe habent ad ſingulos ipſos numeros: ſic ſexcenti aurei, qui ſunt diuidendi, ad numerum quem cuique partitio aſſignabit, ſe habere debẽt. Et permutatim, ſicut omnes illi numeri, qui in partibus denominatis ſeorſum reperiuntur, vnà cum aureorum acceſſione ſimul additi ſe habent ad ſexcentos aureos:

ſic ipſorum numerorum ſinguli ad numerum qui cuique ex partione debetur,ſe habere debēt.Quocirca primo loco poſitis numeris illis omnibus,ſimul additis qui ex partibus denominatis & aureorū acceſſione ſurgunt,qui faciunt 387:ſecundo,eorū ſingulis,alio ſub alio ſeorſum annotato:tertio, ſumma 600 aureorū: ſtatim quantum cuique ex partitione accreſcet, quatuor proportionaliū regula demonſtrabit.Et ſi partes omnes cuique accreſcentes collectæ,æquales erunt ſummæ diuidendæ,nihil eſt erratum.

	89		Primus 137 $\frac{381}{387}$
	80		Secūdus 124 $\frac{12}{387}$
387		600	
	107		Tertius 165 $\frac{345}{387}$
	111		Quartus 172 $\frac{36}{387}$

Quæſtio XXIII.

ESTO, centum aurei inter tres ea lege diuidendi ſint, vt quoties primus quinos conſequitur,ſecundus ſenos capiat:quoties ſecundus ſeptenos habet,tertius ſumat nouenos. In hac partitione ambigitur, cū pro quinis quibuſque primi ſecūdus ſenos habeat, quantum debetur tertio.Rem inuolutam ſic extricabis,Conſydera ſi ſepteni aurei ſecundi tertio nouenos pariūt: facile ſciri poteſt quot aureos tertio ſecundi referent. Nam ſicut ſepteni ſecundi ſe habent ad ſenos eiuſdem:ſic noueni tertij ad ſummā quā is habiturus eſt,ſe habere debēt.Et permutatim,ſicut ſepteni ſecūdi ſe habēt ad tertij nouenos:ſic ſecundi ſeni ad ſummā quā tertius eſt cōſequuturus.Quare quatuor proportionaliū regula deprehēdit,pro numero tertij in tota hac partitione, aureos ſeptenos & $\frac{5}{7}$ ſumendos eſſe. Quamobrem ſi omnium triū numeros, videlicet 5,6,& 7 cum $\frac{5}{7}$ in vnam ſummam coaceruatos primo loco ſtatuamus,videlicet centum triginta & vnam ſeptimas $\frac{131}{7}$, ſecundo autem eorum ſingulos,alium ſub alio ſeorſum annotatum deſignemus, tertio ſummam centum diuidendam: quatuor proportionalium regula ad exemplum prioris proportionis, quæ de omnibus illis partibus ad earum vnamquanque reperitur, facile poſteriorem de ſumma diuidenda, ad eam ſummam quam quiſque habiturus eſt, deformabit:ſtatímque patefaciet primo 26 $\frac{94}{131}$, ſecundo 32 $\frac{8}{131}$,tertio 41 $\frac{29}{131}$ ex partitione deberi.

	5		Primus 26 $\frac{94}{131}$
$\frac{131}{7}$	6	100	Secũdus 32 $\frac{8}{131}$
	$7\frac{5}{7}$		Tertius 41 $\frac{29}{131}$

IN HAC partitione facienda, quando alioqui exercitatos labi nonnunquam vidimus, admonendos iuuenes eſſe duximus, ne errarent: vt poſtquam primi & ſecundi numeros in centũ multiplicatos per diuiſorem ſecuerint, cum ad tertij numerũ ventũ erit, integra in minutias eis adiũctas ſtatim redigant, vt fiãt 54 ſeptimæ, quas deinde in centũ multiplicent, ſic ſurgẽt $\frac{5400}{7}$. Hoc loco quia minutiæ quæ diuidẽdæ ſunt, & quæ ſunt diuiſores, eũdẽ denominatorẽ habẽt: maior numerator earũ quæ ſecandæ ſunt, per earum quæ ſecant numeratorẽ minorem, integrotũ more diuidendus eſt, vt numerus eruatur qui attinebit ad tertiũ. Alioqui cum tam diuiſor quàm diuidendus eaſdem integrorum minutias numerẽt, nẽpe ſeptimas: ſi diuiſoris denominatorem videlicet ſeptem, in diuidendi numeratorem integrorũ minutias continentem, & diuidendi denominatorem in diuiſoris numeratorẽ itidem integrorũ minutias numerantem, duceremus in formam crucis: tunc tam diuiſorem quàm diuidendum, qui integrorũ ſeptimas cõtinent, ad ſeptimarũ ſeptimas redigeremus. & cum duas priores ſectiones de ſimplicibus minutijs expediuerimus, ſcilicet de integrorum ſeptimis: tertiã hanc, quæ cum eis conſentire deberet, de minutiarũ minutijs faceremus, totiúſque partitionis mutaremus diuiſorem.

Quæſtio XXIIII.

QVATVOR inter ſe partiri cẽtum aureos ſic cupiunt, vt quot ternos primus capit, totidem ſecũdus quaternos habeat: quot quinos ſecundus, totidem ſenos tertius ſumat: quot tertius ſeptenos, totidem quartus octonos cõſequatur. Ambigitur quonam modo fiet iuſta partitio. Multos exercitatos vidimus ad hoc ſaxum impingere, dum nec ſingulorum partes ſcirent inueſtigare, neque his tandẽ inuentis, ſummã propoſitam ad earum rationem diuidere. Tota autẽ res ſic expedietur. Principio ſingulorũ partes ad eundem modũ exquiruntur quem proximo quæſito monſtrauimus. Et ſecundi quidẽ pars, cui fabricandæ primi portio dat legem, facile cognoſcitur, cũ alter ternos, alter quaternos ſit accepturus. Tertij verò portio, quæ tot ſenos habere debet, quot ſecundus quinos

capit:non tam cito ſeſe offert,cum ſecundus quaternos non quinos ſumat. Quamobrem conſyderandum eſt, ſi quini aurei ſenos afferunt,quot aureos quaterni reddent: & per quatuor proportionalium regulam deprehendemus tertij portionem capere aureos 4 & $\frac{4}{5}$. Rurſus quarti pars,quæ tot octonos habere debet, quot tertius ſeptenos ſumit,cum tertij portio 4 & $\frac{4}{5}$ non ſeptenos capiat,ad hunc modũ exquiretur,vt videndum ſit ſi ſepteni pariunt octonos , quot ad eam rationem ex 4 & $\frac{4}{5}$ obuenire debent. Et quatuor proportionalium regula monſtrabit quarti portionem 5 & $\frac{17}{35}$. Demum poſtquam exquiſitæ ſunt partes ſingulorum, omnes in vnam ſummam per additionem colligantur , & prodibunt $\frac{605}{35}$: quæ diuiſoris fungentur partibus,& primum locum tenebũt. ſecundum,ſingulorum partes aliæ ſub alijs ſeorſum annotatæ.tertium,ſumma 100 aureorum, quæ diuidenda eſt . Cætera per quatuor proportionalium regulam expediãtur. Cum autem ad quarti portionem ventum erit, poſtquam ea in centũ multiplicata eſt, quia minutiæ productæ denominatorem habebunt eundem , quẽ diuiſor : ideò numerator earum ſolus per diuiſoris numeratorem, integrorum ritu ſecetur,ſicut in proximo quæſito monſtrauimus: cuius rei rationem illic aperuimus.partes autem cuiuſque apparebunt,hæ quæ ſequuntur.

	3		Primus	17 $\frac{43}{121}$
	4		Secundus	23 $\frac{17}{121}$
$\frac{121}{7}$		100		
	4$\frac{4}{5}$		Tertius	27 $\frac{465}{605}$ quæ ſunt $\frac{93}{121}$
	5$\frac{17}{35}$		Quartus	31 $\frac{89}{121}$

Quæſtio x x v.

LEGIO habet peditum ſex millia & centum, equites ſeptingẽtos viginti ſex.Eſto,pedes ſtipendium quatuor nummos ſeſtertios in diem capiat, eques nouem.Si duorum millium aureorum præda ſecundum eandem rationem inter eos diſtribuenda ſit,quantũ conſequentur equites?quantúmque pedites?In primis multiplicare oportet equitum numerum in numerum ſtipendij,quod eorum quilibet in diem capit,& ſurgẽt 6534.quæ ſumma ſeorſum erit annotãda. Itidémque faciendũ eſt de peditũ numero,& fient 24400, quæ ſeorſum etiam notentur.deinde illi duo numeri procreati ſi-

mul addatur,& prodibunt 30934. quæ ſumma ſi reperta eſſet,nullo negotio inter equites & pedites poſſet diuidi. Atque ideo ad illarum ſummarum productarum exemplum, hæc, quæ propoſita eſt, ſumma duorum millium erit diuidenda. Nam quæ proportio eſt amborum productorum numerorū ad alterum ex ductu equitum in ſua ſtipendia natum , eadem comperietur numeri propoſiti duorum millium ad eum numerum, quem equites ex præda habere debent.Et permutatim,quæ proportio eſt amborum numerorum productorum ad numerum propoſitum duorum millium, eadem erit alterius ex ductu equitum in ſua ſtipendia nati,ad numerum quem equites ex præda conſequentur. Quare vt primum de equitibus abſoluamus: primo loco ambos numeros productos ſimul additos locemus, ſecundo numerū ex ductu equitum in ſua ſtipendia procreatum,tertio numerum diſtribuendum duorū millium. Deinde ex quatuor proportionalium regula deprehēdemus equitibus obuenire $422\frac{13852}{30934}$, quæ ſunt $\frac{6926}{15467}$ Ea ſumma eſt quam equites vniuerſi conſequentur.quam ipſam ſi per equitum numerum poſtea diuidas,tum deprehēdes quantum vnuſquiſque eques habiturus eſt.Et quoniam ea minor eſt quàm vt per equitum numerum ſecari poſſit, in viliorem pecuniam multiplicanda eſt, vt ſectionē ſubire valeat. De peditum portione inueſtiganda ſimiliter agendum erit . Nam quæ proportio eſt amborum productorū numerorum ad alterum ex ductu peditum in ſua ſtipendia natū, eadem reperietur propoſiti numeri duorum millium ad eum numerum quem pedites ex præda cōſequentur.Et permutatim, quæ proportio eſt amborum productorum numerorum ad numerum propoſitum duorum millium,eadem erit alterius ex ductu peditū in ſua ſtipendia nati, ad numerum quem pedites ex præda habituri ſunt . Cætera eo modo expediantur quo de equitibus diximus: & peditum portio erit $1577\frac{17082}{30934}$.

AD EVNDEM modum diſtributio fiat, ſi inter canonicos & alios cuiuſuis templi ſacerdotes pecuniam diuidere ſic oporteat, vt quoties inferiori ſacerdoti tria obueniunt,canonico accreſcant quinque.

Quæſtio XXVI.

IN VNA moletrina trinæ molæ reperiuntur,quarum vnæ duodecim horis modios tritici decem & octo molunt : Secundæ, per idem tempus modios tredecim : Tertiæ , tanto tempore modios

octo. Accedit ad moletrinam ruſticus, tritici modios afferens vigintiquatuor, quos omnibus molis ſic ſupponi deſyderat, vt vno momento ſingulæ ſuum opus abſoluant. & ſcire cupit à molitore quanto tempore ſit expectandum vt res expediatur, quantúmque quibuſque molis ſit ſubijciendum, vt omnes vnà deſinant. Prima quæſtio facilis explicatu videtur, ſi omnes modios ſimul addamus quæ duodecim horis moluntur à trinis molis: cum duæ proportiones deprehendentur, vna de omnibus illis modijs ſimul additis, qui ſunt triginta nouem, ad modios viginti quatuor à ruſtico allatos: altera de duodecim horis, ad illum horarum numerum, quo molæ expedient opus. Etenim ſicut omnes modij ſimul additi, qui ſunt 39, ſe habent ad 24 modios à ruſtico allatos: ſic horæ duodecim ad illum horarũ numerum quo res abſolui poteſt, ſe habere debent. Et permutatim, ſicut illi 39 modij ſimul additi ſe habent ad duodecim horas, ſic 24 modij ad illum horarum numerum quo res finietur. Ita demum ex quatuor proportionalium regula comperietur, vigintiquatuor modios à trinis illis molis expediri poſſe ſeptem horis & quindecim triceſimis nonis.

Modij	Modij	Horæ	Horæ
39	24	12	$7\frac{15}{39}$

Poſtquam deinde prius quæſitum de tempore, quo modij 24 ſimul abſolui poſſunt, exploratum eſt: poſterius quæſitum de modiorum numero, qui ſingulis quibuſque molis ſubijci debet, continuo poteſt excuti, cum de tempore iam certo ad ſingularum molarum modios quæſtio ſit verſa. Nam ſicut 12 horæ ſe habent ad horas 7 & $\frac{15}{39}$: ſic 18 modij qui per primas molas 12 horis conficiuntur, ad illum modiorum numerum ſe habere debet qui horis 7 & $\frac{15}{39}$ molis eiſdem ſubijcientur. Et permutatim, ſicut 12 horæ ſe habent ad modios 18, qui per primas molas eo tempore expediuntur, ſic horæ 7 & $\frac{15}{39}$ ad illum modiorum numerũ qui eiſdem molis per id tempus ſunt ſubijciendi. Ad quem modum ſi per ſecundas atque item tertias molas comparationem facias, quæ res antè obſcura viſa eſt, à regula quatuor proportionalium illuſtrabitur. Id quod ſtatim fiet, ſi primo loco horas 12 ſtatuas, Secundo horas 7 & $\frac{15}{39}$. Tertio illum modiorum numerum qui à ſingulis molis duodecim horis confici poteſt, alium ſub alio ſeorſum annotatũ.

Modij

18 Primæ molæ 11 $\frac{36}{468}$. quæ faciunt $\frac{1}{13}$

Horæ 12 — Horæ $7\frac{15}{39}$ — 13 Secūdæ molæ 8

8 Tertiæ molæ $4\frac{432}{468}$. quæ faciunt $\frac{12}{13}$

ITA cōperiemus primis molis ſubijciendos eſſe modios vndecim & vnius modij vnā decimātertiā, Secūdis molis modios octo, Tertijs modios quatuor & duodecim decimas tertias. Qui modiorū numerus in ſummā collectus profert vigintiquatuor modios à ruſtico allatos. Ex quo liquere poteſt recte ſupputatum eſſe.

Quæſtio XXVII.

AQVAE plena ciſterna quæpiam fiſtulas tres habet, ex quarum maxima ſi extrahas epiſtomium, vna hora aqua tota effluet. Secunda fiſtula, quæ minor eſt, aquam euomit horis duabus. Tertia, quæ minima eſt, tribus horis emittit aquam. Iam ſi exēptis epiſtomijs, vnà omnes fiſtulæ pateant, ambigitur quanto tempore tota aqua effluet. In hac hæſitatione explicanda, quoniam vna hora integra maxima fiſtula totam aquam fundit, minor horis duabus, minima tribus: minimus numerus in primis inquirendus eſt, quem hi numeri, vnum, duo, & tria numerant. qui quemadmodum ſit inueſtigandus, ſuperiori libro edocuimus. Is autem comperietur numerus ſenarius: qui numeros hos, à quibus numeratur, partes ſuas habet. Et quia intra ſe complectitur numeros illos omnes à quibus numeratur, qui tempus aquæ numerant per ſingulas fiſtulas ſeorſum exeuntis, diuidendus erit vti mox dicemus. Poſtea conſyderandum eſt, ſicut maxima fiſtula vna hora totam aquam exhaurit: ita quæ duabus horis id facit, vna hora aquæ dimidium effundit: quæ tribus horis id peragit, vna hora tertiam aquæ partem emittit. Deinde quia omnes fiſtulæ vno tēpore aperiuntur, omnes numeri incluſi in integro illo & eius partibus, quas numeri eum numerantes denominant, educendi ſunt, vt ſimul addantur. Id quod ſtatim fiet, ſi integrum illum per ſingularum partium denominationem ſeorſum diuidas. quippe ſi ſex per duo ſeces, tria inuenies: ſi per tria, duo. Nam quia numerus ſenarius numerus minimus integer eſt, quem vnum, duo, & tria numerāt: quíque partem vnam ſecundam atque vnam tertiam habeat: ipſe integer ſumendus eſt, cuius pars quidem ſecunda, tria: tertia verò duo continet.

Hi autem numeri,ſex,tria,& duo ſimul additi procreabunt vndecim.qui numerus,tempus aquæ per omnes fiſtulas fluentis,exprimit : numeróſque omnes ex integro illo & eius partibus exeuntes ſimul additos capit.Hic diuiſoris partibus fungetur in hoc quæſito. Cæterum quoniam ſex ab vndecim diuidi nequeunt , vt vterque numerus integer maneat:ideo numerus ille horarum ſenarius in ſexaginta momenta,quæ partes ſunt vnius horæ, multiplicandus eſt, vt ſectionem ferat . Ita numerus continens tempus aquæ ex ſingulis fiſtulis ſeorſum effluentis , per numerum momentorũ aquæ ſimul ex vniuerſis erumpentis diuidetur.qui quoties in horarum numero diuidendo fuerit inuentus, tot effluentis aquæ momenta comperientur.

IDQVE ITA habere huiuſmodi conſyderatione deprehendi poteſt. Nam cum numerus ſenarius complectatur omne tempus ſeparatim elabentis aquæ:fiſtula quæ vna hora aquam educit, ſex horis ſexies id faceret :quæ verò duabus horis aquam emittit, ſex horis ter id perageret: quæ tribus horis aquam exhaurit, ſex horis bis aquã effunderet : atque ita ſimul omnes fiſtulæ ſex horis aquã vndecies educerent. Verum quia in quæſtione propoſita,aqua tantum ſemel,non vndecies ex ciſterna fundenda eſt: quæ proportio eſt inter vndecim & vnum,eadem erit inter ſex & aquæ effundendæ tempus. Et permutatim,quæ proportio eſt inter vndecim & 6, eadem erit inter 1 & tempus aquæ fundendæ. Secundum regulam igitur quatuor proportionalium per 11 ſecãtes horas 6,prius in 60 momenta mul iplicatas,vt iam diximus: comperiemus omnes ciſternæ fiſtulas patentes,triginta duobus vnius horæ momentis atque octo vndecimis totam aquam emittere.

		60	
11	1	6	$32\frac{8}{11}$
		360	

VEL SI libet 6 per 11 in minutias ſecare:deprehẽdemus $\frac{6}{11}$ vnius horæ , quæ tempus monſtrant exhauriendæ aquæ. qui ſecandi modus cum priori conſentit:quippe cum in vna hora 60 ſint momenta,quorum pars vndecima momenta 5 & $\frac{5}{11}$ momentorum capiat:ea pars ſexies ſibi addita profert momenta 32 & $\frac{8}{11}$. Porrò momenta 5 ſexies accumulata creant 30. Rurſus $\frac{5}{11}$ momentorum ſexies aggregatæ educunt $\frac{30}{11}$ momentorum , quæ duo integra momenta conſtituunt & $\frac{8}{11}$.

PORRÒ ſi idgenus quæſtioni vnum integrum non admiſceatur, facilius multo explicabitur: nec erit neceſſe numerũ diuidendum in partes ſuas frangere,quandoquidem maior diuiſore com-

perietur. Veluti ſi ciſternæ alicuius tres ſint fiſtulæ, quarũ ſi maxima aperiatur, quatuor horis aqua effluet: ſi minor, horis ſex: ſi minima, horis octo. & ambigitur, ſi vnà omnes fiſtulæ, ſublatis epiſtomijs, patefiãt, quanto tẽpore ex ciſterna aqua tota exibit. Principio minimus numerus inueſtigandus eſt quẽ quatuor, ſex, & octo numerãt. Is autẽ cõperietur vigintiquatuor, qui partes ſuas habet numeros illos omnes à quibus numeratur, tempus numerantes aquæ per ſingulas fiſtulas ſeorſum exeuntis. Hic numerus ſecãdus eſt, vt quæſitum eruamus. Tũ conſyderandũ eſt, Sicut fiſtula quæ ciſternam quatuor exhaurit horis, vna hora quartam eius partem emittit: ſic quæ ſex horis id complet, vna hora ſextam eius partem facit vacuam: quæ horis octo aquam educit, vna hora partem octauam aufert. Deinde quia omnes fiſtulæ vno tempore fluunt: omnes numeri cõprehenſi in illius integri partibus, quas numeri eũ numerantes denominant, exquirendi ſunt, atque vnà addendi: vt per eos integer ille, qui ſuis partibus eos includit, diuidatur. Et quia ex 24, quarta pars cõtinet ſex, ſexta quatuor, octaua tria: ſex, quatuor, & tria ſimul addantur, & fient 13. qui numerus tempus aquæ per omnes fiſtulas ſimul efflu ẽtis numerat. Hic numerus diuiſor numerum 24 integrum partium ſuarum denominationibus tempus aquæ per ſingulas fiſtulas ſeorſum fuſæ demonſtrantem, atque intra ſuas partes numeros additos includẽtem ſecare debet. Quippe cum numerus 24 capiat omne tempus ſeparatim efflu ẽtis aquæ: fiſtula quæ ciſternam 4 horis exhaurit, horis 24 ſexies id faceret: quæ ſex horis aquam fundit, horis 24 quater id compleret: quæ horis octo aquã educit, 24 horis ter eam emitteret: atque ita omnes ſimul 24 horis aquã tredecies educerent. Verũ quia in quæſtione propoſita aqua tantũ ſemel non tredecies ex ciſterna fundenda eſt: quæ proportio eſt inter 13 & vnũ, eadem erit inter 24 & aquæ effundendæ tẽpus. Et permutatim, quæ proportio eſt inter 13 & 24, eadẽ erit inter vnũ & tempus aquæ exhauriendæ. Secũdũ regulam igitur quatuor proportionalium per 13 ſecantes 24, comperiemus omnibus fiſtulis apertis aquam ex ciſterna effluere hora vna & vndecim decimis tertijs. 13 1 24 $1\frac{11}{13}$

Quæſtio XXVIII.

ESTO, ciſterna quæpiam tres habeat fiſtulas, quarum maxima per horæ quadrantem plenã ciſternam exhauriat: minor, per horæ dimidium: quæ minima eſt, per horæ ſpacium totam aquam

fundat: ſi ſublatis epiſtomijs, vnà omnes fiſtulæ pateant, quanto tẽ pore vacua reddetur ciſterna? Hæſitatio hæc ſuperiori ſimilis eſt, & ſimili modo ſoluenda, præterquam quòd illic de horis integris, hic de vnius horæ partibus quæſitum eſt. Veruntamen ſi quem minutias vitare iuuat (id quod plerique omnes, quantum fieri poteſt, cupiunt) hic quoque integrorũ more cuncta expediri poſſunt, vt horæ quadrans velut integrum quiddam computetur: horæ dimidium, quod duos quadrantes continet, pro duobus integris: hora verò, quæ 4 quadrantes capit, pro 4 integris. Ita minimum numerum, quem vnũ, duo, & quatuor numerant, inueſtigãtes, deprędemus 8. qui numerus omne tempus elabentis aquæ complectens diuidendus eſt. Deinde conſyderemus eam fiſtulam quæ per horæ quadrantem totam aquam fundit, per octo quadrantes octies id efficere: quæ per horæ dimidium aquam emittit, per octo quadrantes quater id præſtare: quæ per horæ ſpatium aquam exhaurit, per octo quadrantes bis eam educere: atque ita fiſtulas omnes vnà patentes per octo quadrãtes decies & quater aquam fundere. Sed quia in quæſtione propoſita aqua tantum ſemel, non decies & quater emittẽda eſt: quæ proportio eſt inter 14 & 1, eadem erit inter 8 & aquæ exhauriendæ tempus. Et permutatim, quæ proportio eſt inter 14 & 8: eadem erit inter 1 & tempus aquæ effundendæ. 14 igitur numerus diuiſor erit. Et quia 8 numerus diuidendus, qui horarũ quadrantes numerat, minor eſt quàm diuiſor, propterea multiplicetur in horarum momenta totidem, quot horæ quadrantem efficiunt. ea autẽ ſunt 15. Ita ſurgent 120. quæ ſi per 14 ſecentur, partitionis numerus proferet 8 $\frac{8}{14}$. totidem nanque momentis ciſterna vacua fiet.

Quæſtio XXIX.

AQVAE ductus per ſalientem quatuor horis ciſternam implet. Obſtruſo verò ſaliẽte, fiſtula in ciſternæ fundo, ſi tollas epiſtomiũ, vndecim horis emittit aquam. Iam ſi vacuam ciſternã patefactus ſaliẽs impleat, atque per idem tempus aperta fiſtula exhauriat, intra quãtum temporis plena erit ciſterna? Ex hoc labyrintho ſic tete extricabis. Quia ciſternam implendi tempus, quod quatuor eſt horarum, cum euacuandi tempore, quod eſt horarum vndecim, cõcurrit: quatuor in vndecim ducere oportet, vt vnus numerus de vtroque fiat, qui partes omnes vtriuſque temporis intra ſe cõplectatur. Is autem numerus erit 44. Et quia tempus implendi cele-

rius eſt,& euacuandi tardius: obſeruare oportet vtriuſque temporis inter ſe diſtãtiam. Eam autem ſi alterum tempus ab altero ſubducas, numerus reſtans indicabit: qui reperietur ſeptem. Ita ſi numerum ex vtriuſque temporis multiplicatione procreatum diuidas per eorum inter ſe diſtantiam: numerus ſectionis patefaciet, quot horis, effluentis aquæ tarditatem celeritas influẽtis aſſequetur. Horæ igitur 44 diuiſæ per ſeptẽ, in numero partitionis educunt 6 horas & $\frac{2}{7}$. intra quas ciſterna plena erit. Sic omnes horas & implendi & exhauriendi per multiplicationem in vnum nu rum collectas earum inter ſe differentia ſecabit, vt quæſitum explices. Idque ita habere vel ex illa cõſyderatione liquere poteſt: quod ſaliens quatuor horis ciſternam implens, vna hora quartam eius partem reddit plenam: fiſtula autem, quæ vndecim horis aquam educit, vna hora partem vndecimam eiuſdem quartæ partis exhauriet. Ideo vt ſciamus quantum vna hora conferet ad implendum, ab vna quarta parte pars vna vndecima ſubducatur: & ſuperſunt $\frac{7}{44}$. quæ minutiæ reſtantes indicant quot partes ciſternæ vna hora implentur, nempe de quadraginta quatuor partibus ſolæ ſeptem. Quoties itaque ſeptem in 44 habentur, totidem horæ requiruntur ad ciſternam implendam. Nam ſicut ſeptem ciſternæ partes ſe habent ad 44, quæ ſunt omnes eius partes: ſic vna hora, qua ſeptem ciſternæ partes implentur, ad illum horarum numerum, quo tota plena erit, ſe habere debet. Et permutatim, ſicut ſeptem partes ciſternæ ſe habent ad vnam horã, ita 44 quæ ſunt omnes ciſternæ partes, ad eum horarum numerum, quo poterit impleri. 7 44 1 6 $\frac{2}{7}$.

Quæſtio xxx.

TVRRIS extruenda eſt, cuius altitudo erit quadraginta cubitorum, ſingula latera exterius latitudinem habebũt cubitorũ vicenum, interior autem habitatio ad vſus hominum per ſingula latera cubitos patebit quindenos: conuenítque cum operis redemptore, ſingulos aureos in ſingulos cubitos dari. quanti igitur conſtabit totius turris ſubſtructio? Ad hoc quæſitum perueſtigandũ, in primis quia latera omnia paria ſunt, eorum latitudinem in ſe multiplicare oportet. & ſurgẽt quadringenta. Deinde numerus ille ex latitudinis ductu procreatus rurſus in altitudinẽ ducendus eſt, & prouenient ſexdecim millia. tot aureis conſtaret turris, ſi eſſet ſolida, nihílque haberet concaui. Cæterum quia interna habitatio

per ſingula latera cubitos patebit quindenos: ipſam cõcauitatẽ in ſe multiplicare oportet: vnde prodibũt ducenta viginti quinque. Qui numerus ex concauitatis in ſe ductu creatus denuo in altitudinem ducendus eſt, atque ita exibunt nouem millia. tot cubitos capit vniuerſa cõcauitas. quæ ſi dematur de turris ſoliditate, quæ ſexdecim millium cubitorum erat, reſtabunt ſeptem millia. tanti conſtabit abſoluta turris.

Quæſtio XXXI.

MVRVS erigendus eſt qui mille cubitos in longitudinẽ porrigetur: ſurget autẽ in altitudinem cubitos quadraginta: at craſſitudo erit cubitorum quinque. Is fiet ex lapidibus ſectis, quorũ vnuſquiſque dimidij cubiti longitudinem habebit, latitudinem partis tertiæ vnius cubiti, craſſitudinem partis quartæ. quot eiuſmodi lapides muro exſtruendo ſufficient? Hæſitatio hæc ſic extricabitur. Muri lõgitudinem, quæ cubitorũ eſt mille, in altitudinẽ, quæ quadraginta eſt, multiplicare oportet: & ſurgent quadraginta millia. qui numerus procreatus rurſus in craſſitudinem, quæ quinque cubitos implet, ducendus eſt: & prouenient ducenta millia. tot cubitos tenet tota muri quadratura. Similiter lapidum dimenſio, quæ conſtat ex minutijs, in ſe multiplicanda eſt $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$, & prodibit vna viceſimaquarta vnius cubiti, quæ ſecti cuiuſque lapidis dimenſionem capit. Iam vt ſcias quot lapides murum conſummabunt: per lapidum dimenſionem minutias habentem $\frac{1}{24}$ diuidere oportet muri quadraturam, quæ ex integris numeris cõſtat $\frac{20000}{1}$. Vnde creabuntur quater millena atque octingẽta millia 4800000. toties enim in muri quadratura dimenſio lapidum reperitur. Atque ideo tot lapides muro erigendo ſufficient.

Quæſtio XXXII.

QVATVOR architecti ad prætorium ædificandum euocantur: primus vno anno confectum opus dare ſpondet, Secundus biennio, Tertius triennio, Quartus quadriennio. Iam ſi vnà omnes aggrediantur opus, quanto tempore abſolutũ erit prætoriũ? Quæſtio hæc ſimilis eſt illi de ciſterna tres habente fiſtulas, & ſimili modo ſoluenda. Nã minimus numerus in primis inquirendus eſt, quem hi numeri vnũ, duo, tria, & quatuor numerãt. Hunc autẽ inueniemus duodenariũ, qui numeros illos omnes, à quibus numeratur,

ſeparatim extruendi operis tempus numerantes, intra ſe complectitur: atque ideo annotandus eſt, vt ſectionem ſubeat. Illud poſtea animaduertendum eſt, Qui annum poſcit, anno integro rem abſolutam dabit: qui biennium petit, anno vno operis dimidium conficiet: qui triennium, anno vno tertiam operis partem eriget: qui quadriennium, anno vno quartam ædificabit. Deinde quoniã omnes architecti operas ſuas in vnum conferunt: omnes numeri comprehenſi in integro illo & eius partibus quas numeri eum numerantes denominant, perſcrutandi ſunt, & ſimul addendi. quo fiet, vt cum duodenarius numerus minimus integer exiſtat qui ab vno, duobus, tribus, & quatuor numeratur, quiſque $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{4}$ habeat, pro vno anno integro numerus ipſe integer ſumendus ſit. Et cum eius dimidium 6 contineat, tertia 4, quarta 3: numeri illi ſex, quatuor, & tria, qui denominatis illis partibus ſunt incluſi, ad 12 addantur, & fient 25, qui numerus tempus numerat quo omnes architecti ſimul operas conferunt. Hic diuiſor erit: & numerum illum 12 in ſe atque in ſuis partibus numeros additos includentem, ſeparatimque ædificantium tempora complectentem ſecare debet. Ita tempora ſeparatim extruendi operis vno anno cõprehenſa, per tempus iunctim erigendi diuidentur. Nam cum numerus duodenarius complectatur omne tempus operis ſeparatim extruendi: architectus qui vno anno prætorium ædificabit, duodecim annis duodecies id abſolueret: qui biennio id complebit, 12 annis ſexies id efficeret: qui triennio, 12 annis quater opus erigeret: qui quadriennio, 12 annis ter opus conſummaret: atque ita vnà omnes architecti 12 annis vicies & quinquies opus abſoluerent. Sed quia in quæſtione propoſita opus tantum ſemel non vicies & quinquies fieri debet: ideo quæ proportio eſt inter 25 & 1, eadem erit inter 12 & tempus finiẽdi operis. Et permutatim, quæ proportio eſt inter 25 & 12, eadem erit inter 1 & operis finiendi tempus. Itaque per 25 ſecare 12 oportet. & quoniam numerus diuidendus diuiſore minor eſt, 12 quæ annos numerant, in 12 menſes quæ partes ſunt vnius anni ducantur, & prodibunt 144: quæ ſecta per 25 reddent menſes 5 & $\frac{19}{25}$. quo tempore prætorium omnes conſummabunt. 25 1 12 $5\frac{19}{25}$.

QVAESITVM explicari facilius potuiſſet, ſi vnum integrum non fuiſſet admixtum, ſicuti in fiſtularum quæſtione diximus.

Quæſtio XXXIII.

DVO architecti ſuſcipiunt opus faciendum, quorum alter diebus triginta ſolus id perficeret, alter ſolus diebus quadraginta. Hi, quo celerius rem finiant, tertium architectum accerſunt, atque omnes vnà conferentes operas, diebus quindecim totum opus cõficiunt. Quæritur quot diebus tertius accerſitus id ſolus effeciſſet. Vt rem abſtruſam eruamus, principio excutere oportet, quantum illius operis vno die, primorum duorum vterque pro parte ſua fecit. Et quidem ſcitu facile eſt, ſi quindecim illos dies facti ab omnibus operis per vtriuſque dies, quibus ſolus id abſoluiſſet, ſeorſum diuidamus. Ita ſi dies quindecim per dies primi triginta ſecemus: cum maior numerus ſit diuiſor, minor diuidendus: eæ minutiæ prodeant neceſſe eſt, quas numerus diuidendus factus numerator, & numerus diuiſor denominator effectus creabunt. videlicet $\frac{15}{30}$, quæ ad minimam nomenclaturam redactæ faciunt $\frac{1}{2}$. tãtum de illo opere primus vno die fecit. Similiter dies ſecundi 40 ſecantes 15, procreant $\frac{15}{40}$, quæ faciunt $\frac{3}{8}$. tantum de illo opere ſecundus vno die peregit. Iam verò ſi $\frac{1}{2}$ & $\frac{3}{8}$ ſimul addantur: colliguntur $\frac{7}{8}$. tantum vno die de illo opere ambo confecerunt, reliquum fecit tertius. Quantum autem id ſit, ſcies ſi ab vno die, quo ſimul omnes opus faciunt, ſubducas opus à duobus primis factum, nempe $\frac{7}{8}$. ita ſupererit $\frac{1}{8}$. quæ minutiæ reſtantes indicãt octauam operis partem vno die à tertio factam eſſe. Quod cum eſt compertum, videndum eſt quoties in quindecim illis diebus totius operis facti, minutiæ illæ, quæ tertij opus demonſtrant, contineantur. id quod è veſtigio per ſectionem patefiet: nam ſi per $\frac{1}{8}$ quindecim ſecentur, numerus partitionis proferet centum viginti. quo dierum numero tertius ſolus opus conſummaſſet.

Quæſtio XXXIIII.

TVRRIS cuiuſpiã pars tertia ſub terra latet, quarta pars ſub aqua demergitur, cubiti ſexaginta ſupra aquam eminent. Ambigitur quot cubiti in terra ſint, quot in aqua. Minimũ numerum exquirere oportet, quem partium illarum ſub aqua & terra tectarum denominatores numerant. Is autem ſi denominator alter in alterum ducatur, inuenietur 12. qui numerus non ſolum latentes illas turris partes intra ſe complectitur, ſed totum etiam turris corpus, cuius illæ ſunt partes. Qua ratione partes quoque cæteras eminẽtes vniuerſas capit. Itaque ſi à tertia & quarta turris parte reliquas

ſeparare volumus: ſubducamus à 12 ambas illas ſub aqua & terra latentium partium denominationes, quæ faciunt 7. & reſtabunt 5 partes reliquæ de 12. Hæ autem partes ſunt ſupra aquam extantes, quæ cubitos 60 in ſe continent. Iam verò poſtquam comperimus omnes turris partes eſſe 12, atque earum quinque capere cubitos 60, ſcitu facile eſt quot cubiti ſint in tota turri. Nam ſicut turris partes 5 ſe habent ad partes 12, quæ ſunt vniuerſæ, ſic cubiti 60 ad eum cubitorum numerum qui in tota turri continentur, ſe habere debent. Et permutatim, ſicut partes 5 turris ſe habent ad cubitos 60 quos continent, ſic partes 12 quæ ſunt vniuerſæ, ad eum cubitorum numerum quos tota turris capit. Igitur deſignatis in eum ordinem proportionibus, vt primo loco ſint 5, ſecundo 12, tertio 60: quatuor proportionalium regula deprehendit in tota turri cubitos 144 contineri. 5 12 60 144.

Deinde cubitorum numerus, quos tertia pars ſub terra tegit, facile eruitur: ſi numerum vniuerſorum turris cubitorum diuidas in tria. ſectionis enim numerus, 48 cubitos profert, qui ſub terra latent. Eadem facilitate inuenire licet numerum cubitorum, quos pars quarta ſub aquis demerſos tenet, ſi vniuerſos turris cubitos in quatuor ſeces. Nam numerus partitionis educet 36. Itidem ſi vniuerſum cubitorum numerum, videlicet 144, in partium vniuerſarum numerum, nempe 12, diuidas: in numero ſectionis 12 ſurgēt. Ex quo ſcire licet 60 cubitos 5 partes totius numeri capere, quinquies enim 12, creant 60.

Quæſtio XXXV.

ROMAM ex Britannia quiſpiam proficiſcens ſingulis diebus viginti millia paſſuum conficit: Septimo pòſt die alter iter ingreſſus triginta tria paſſuum millia quotidie progreditur. Quot diebus illum præcedentem hic ſequens aſſequetur? Vt rem confeſtim explices, ſpatium in primis annotare oportet à priore confectum, antequam poſterior profectus eſt: id eſt centum viginti millia paſſuum, ſex diebus confecta. Quæ ſumma diuidēda eſt. At illud ſpatium quod quotidie poſterior amplius quàm prior conficit, diuiſor nobis erit. id autem eſt tredecim millia paſſuum. Ita ſi centum viginti per tredecim ſecemus: deprehendemus in numero ſectionis, nouem dies tres tertiasdecimas. per quod tempus poſterior priorem conſequetur. 13 1 120 $9\frac{3}{13}$.

Quæſtio XXXVI.

NAVIS ex Britannia in Palæſtinam proficiſcens,ſingulis diebus ſeptuaginta millia paſſuum procedit: noctibus verò reflante vento,retrò à curſu ſuo quindecim millia reijcitur. Iam cum tota nauigatio quater millena millia paſſuum capiat,quando in Palæſtinam appellet nauis? Facile id extricatu eſt. nā nocturna milliaria à diurnis deducenda ſunt:& ſumma reſtans quæ curſum nauis indicat,diuiſoris partes ſubibit,per quam ſecare oportet totius nauigationis numerū,nempe 4000. Ita ſectionis numerus demōſtrabit ſeptuaginta duobus diebus & quadraginta quinquageſimis quintis nauigationē hanc abſolui poſſe. 55 1 4000 $72\frac{40}{55}$

Quæſtio XXXVII.

CVRSOR ab Eboraco Londinum proficiſcens,quinque diebus iter conficit: at alter magis expeditus à Londino Eboracū tribus diebus excurrit. Si eodem tēpore vterque,alter à Londino,ab Eboraco alter diſcedit,intra quantum tempus occurret alter alteri? Ad hoc quæſitum eruendum, ex his duobus curſoris vtriuſque temporibus laterum vicem ſubituris per multiplicationem alterius in alterum, vnū numerum producere oportet,qui itineris ab vtroque ſeparatim cōficiendi vniuerſum tēpus per multiplicationē coaceruatū intra ſe cōplectatur. tria igitur in 5 ducta,15 progenerabunt: qui numerus annotandus eſt,vt ſectionem patiatur. Deinde quia vterque vno tempore iter facit: vtriuſque tempus ſimul eſt addēdum,& per ſummam ex hoc ſurgentem,quæ eſt 8,continuo diuidere oportet numerum illum 15 productum. Ita ſectionis numerus tempus occurſus monſtrabit. Idque ita eſſe hac conſyderatione deprehēdemus,quòd qui quinque diebus iter peragit, vno die conficit partem eius quintam:qui tribus diebus, vno die tertiam. Quocirca numeri incluſi in producti numeri partibus illis denominatis,quas vterque vno die conficit,inueſtigandi ſunt,& ſimul addendi. Quo fiet, vt cum de quindecim quinta pars tria, tertia quinque capiat, quinque & tria ſimul addantur, & ſurgent octo. quæ ſumma tempus vtriuſque itineris vnà cōficiendi numerat. is diuiſor erit. Nam numerus intra ſe complectens ſeparatim peragēdi itineris tempora in ſe multiplicata ſecabitur per numerum itineris vnà conficiendi. & quoties hic in illo deprehendetur, tot dies ad curſorum requirūtur occurſum. Ita ſi quindecim per octo diuidantur, partitionis numerus vnum diem & ſeptem octauas

proferet, quo tēpore in itinere alter alteri occurret. 8 1 15 $1\frac{7}{8}$

ALIA etiam conſyderatione rem ita ſe habere facile ſciri poteſt, quòd in quindecim illis diebus ex vtriuſque tempore in ſe multiplicato productis, alter curſor quinquies, alter ter iter abſoluiſſet. qua ratione ambo vnà octies per id tēpus iter confeciſſent. Verū tamen quia in quæſtione propoſita ambo ſemel, at nō octies, iter ſunt facturi: quæ proportio eſt inter 8 & 1, eadem erit inter 15 & tempus occurſus. Igitur ſecundum regulā quatuor proportionalium per 8 ſecantes 15, in numero ſectionis inueniemus $1\frac{7}{8}$.

Quæſtio XXXVIII.

SPATIVM eſt quod expeditus curſor vno die ter cōficit, alter paulo ſegnior vno die bis illud permeat: ſi alter alteri obuiam eodem tempore prodeat, quando inter ſe occurrent? Si rem bene cōſyderes, quoniam vnus dies totum tempus vtriuſque itineris peragendi intra ſe complectitur: diuidere oportet vnum diem per tēpus vtriuſque ſimul additū, quod in ſumma facit quinque: ex qua ſectione proferetur vna diei pars quinta, quæ tempus occurſus indicabit. Idque ita eſſe ex hoc apparebit, quòd qui ter vno die ſpatium tranſcurrit, tertia diei parte ſemel id conficit: qui verò bis vno die id facit, dimidio diei id complet. Secūdum itaque ea quæ præcepta ſunt quæſtione proxima, ſi $\frac{1}{2}$ ducatur in $\frac{1}{3}$, exit $\frac{1}{6}$ diei, in qua alter $\frac{1}{2}$ ſui itineris, alter $\frac{1}{3}$ expediet. Deinde quia ambo ſimul iter faciunt, amborum itinera ſimul addantur, hoc eſt $\frac{1}{2}$ ad $\frac{1}{3}$, & ſumma ſurget $\frac{5}{6}$: in quibus ſimul ambo quinquies $\frac{1}{6}$ ſui itineris in $\frac{1}{6}$ diei parte facient. Cæterum quia in quæſtione propoſita ambo tātum ſemel $\frac{1}{6}$ ſui itineris in $\frac{1}{6}$ diei parte ſunt facturi, quæ proportio eſt inter $\frac{5}{6}$ & vnitatem, eadem erit inter $\frac{1}{6}$ & tempus quo inter ſe occurrent. Igitur ſecundum regulam quatuor proportionalium, per $\frac{5}{6}$ ſecantes $\frac{1}{6}$, in numero ſectionis deprehendemus $\frac{6}{30}$: quæ ad minimam nomenclaturam redactæ faciunt $\frac{1}{5}$, qua diei parte ambo inter ſe occurrent.

Quæſtio XXXIX.

PATERFAMILIAS miniſtro quatuor aureos tradit, iubétque emi piperis, zingiberis, amygdalarū, & ſaccari tot libras æquali numero, quot ea pecunia ſuppeditare poteſt. Miniſter cū pharmacopola hæſitat quot libræ de ſingulis generibus ſumi debeāt. Negotium hoc ſic extricabis, In primis animaduerte quanti vna

libra generum ſingulorum in pecunia minutiori conſtabit:eáque ipſa vnius libræ ſingulorum pretia ſimul adde. is numerus futurus eſt diuiſor. Deinde in eum pecuniæ eiuſdem minutioris numerum, quo pretium vnius aurei ſolet æſtimari, quatuor aureos multiplicare oportet,numerúmque ex hoc enatum per diuiſorem ſecare. Ita ſectionis numerus rem totam patefaciet. Exempli gratia, Eſto piperis libra vendatur nummis ſexdecim: zingiberis decem & octo: amygdalarum duobus: ſaccari quatuor. Pretia hæc ſimul adde, & ſurgent 40. Tum quia vnus aureus centum nummis æſtimatur, quatuor aureos in numerum centenarium multiplica, & quadringenta produces:quæ ſecta per quadraginta,educent decem. tot libras ſingulorum generum referunt aurei quatuor. Ratio eſt in promptu. nam cum de vnoquoque genere,ſingularum librarum pretia in vnum diuiſorem ſint coaceruata, neceſſe eſt, quoties is in diuidendo comperietur, tot libræ cuiuſque generis prodeant æquali numero. 40 I 400 10.

Quæſtio XL.

AVRI libram quiſpiam miniſtro tradit in viliorem pecuniam ab argentario permutandam: & cum auri libra conſtet ex aureis quadraginta octo,aureus autem capiat denarios viginti quinque, quinarios quinquaginta, nummos ſeſtertios centum: ex ſingulis æqualem numerum,quantus haberi poteſt,ſibi iubet referri. Miniſter cũ argẽtario deliberat,quot de quoque genere nũmiſmata ſumi debeãt,vt numeri ſeruetur æqualitas. Hæc hæſitatio proximæ, quã modo explicauimus, ſimilis eſt,& ſimili modo ſoluenda. Exquirenda nãque erit aliqua pecunia vilior, quàm ſint vlla nũmiſmata in quæ fit cõmutatio: atque in eam ſingula cuiuſque generis nummiſmata,quæ pluris valent,redigenda ſunt. Quòd ſi nulla minutior in vſu reperitur, fingamus viliorem,atque in eam nummiſmata,quæ nobis reddi volumus,redigamus. Et quoniam apud veteres nummus ſeſtertius,qui de optatis eſt minimus, decem æreis quadrantibus æſtimabatur, vniuerſa nũmiſmata ſoluamus in quadrantes. Sic ex aureo in quadrantes ducto prodeunt 1000, ex denario 40, ex quinario 20,ex nummo ſeſtertio 10. Omnes deinde hi numeri ſimul ſunt addendi, & ſurgent 1070: qui numerus cuiuſque generis vnum nũmiſma continet. hic diuiſor erit. Poſtea auri libra in ipſos æreos quadrantes multiplicetur, & fient 48000. quem numerum productum ſi per diuiſorem ſecabis, ſe-

ctionis numerus quadraginta quatuor integra proferet. Totidem enim & nō plura cuiuſque generis nummiſmata æquali numero miniſter ex auri libra referre poteſt. Cæterum minutiæ adhuc ſuperſunt, noningenti viginti quadrātes: qui quoniam ſingulorum nummiſmatū æqualem numerum præſtare nequeunt, pro arbitrio in quamlibet pecuniam cōmutandi ſunt. Aureum hic ſumo, quales Romani veteres fuerunt, quorum plerique adhuc extant, atque inſtar gemmarum in pretio habētur: qualéſque noſtrates Nobiles roſati, qui veteribus Romanis pondere reſpondent, auri verò in-

dicatura paululū quid-	1000			
dam cedūt, cum veteres	40			
Eduardei noſtrates & in-	20			
dicaturā & pondus vete-	10			
rum Romanorū referāt.	1070	1	48000	$44\frac{920}{1070}$

Quæſtio XLI.

SOCIETATEM tres in annum inierunt. Primus aureos ſexaginta contulit, menſéſque tantū ſex in ſocietate manſit. Secundus aureorum ſummam attulit, quæ ſeptem menſes ſocijs communis fuit. Tertius ſuos aureos in medium prolatos quinque menſibus cum cæteris cōmunicauit. Lucrum ex his partū eſt, quod diuidunt æqualiter: quæritur quot aureos ſecundus, quot tertius in ſocietatem intulit. Nodum hūc ſic ſolues, Cum ſingulorū pecuniæ ſuos menſes habeant, primi aureos ſexaginta in numerū ſuorum menſium, quibus cōmunes fuerunt, multiplica: & ſurgent 360. Deinde lucrū æqualiter diuiſum indicat etiam aliorū aureos in ſuos mēſes multiplicatos, qui lucrū pepererūt, eandem feciſſe ſummā quæ primi menſium & pecuniæ erat. Quare ſi vtriuſque aureorū ſummam à numero ſuorū menſium ſeparare voles, ſummam illam ex primi menſium & pecuniæ multiplicatione collectam bis diuide, ſemel per menſes ſecundi, qui ſunt 7: & numerus ſectionis pecuniam ab illo collatā indicabit, 51 $\frac{3}{7}$. Iterúmque per tertij mēſes 5, & partitionis numer⁹ aureos ab eo cōmunicatos manifeſtabit 72.

Quæſtio XLII.

IN SACCVLO communem aureorum ſummam tres habebāt, quorū vnuſquiſque ſuæ ſummæ numerū ignorabat. Veruntamen eorū primus ſocios ſuos ſciebat ambos centū & quinquaginta aureos habere. Secundus cognoſcebat alios ambos habere ducentos

& quadringenta, Tertius reliquos habere trecentos viginti ſex. Aperto deinde ſacculo,coniectóque illo aureorũ numero in grandem alienæ pecuniæ aceruũ,hæſitant inter ſe,cum ſuũ quiſque neſciat, quot aureos in vniuerſum omnes, quótque ſinguli repetere debeãt. Difficile videtur explicatu prima facie: cæterum penitius introſpicienti res ſeſe aperit. Nam cum tres ſint, & eorum vnuſquiſque pecuniæ alienæ numerum ſciat,ſuæ pecuniæ portio, quæ ad quenque attinet, ab ipſo ignorata, cognita eſt à reliquis duobus. Quare ſi omnes aliorũ numeros ab vnoquoque cognitos in vnum addamus, bis ſingulorum pecuniam numerus ille tenebit. Collecti autem omnes hi numeri procreabunt ſeptingenta ſexdecim: qui numerus vniuerſam omnium pecuniam bis capiat neceſſe eſt.Quo fit vt dimidium eius, aureorum numerum qui ex ſacculo effuſus eſt,demonſtret. is autem eſt 358. ea ſumma eſt omniũ aureorum. Deinde ſi ſcire libet quot aurei ad primum attinebant, à dimidiato illo numero, qui omniũ aureos capit, ſubtrahe ſummam quam ipſe duos reliquos habere ſciebat: ita relictus numerus aureos eius indicabit 208. Iterum ſi ab eodem dimidiato numero ſubducatur numerus quem ſecundus reliquos duos habere cognoſcebat,remanebunt centum decem & octo,qui numerus aureorum ſecundi erat. Rurſus ſi ab illo dimidiato numero demas numerum quem tertius reliquos ambos habere non ignorabat,triginta duo reſtabunt : totidem erant aurei tertij. Certum eſt argumentum recte ſupputatũ eſſe, ſi collecti omnes numeri poſt ſubductionem reſtantes,qui ſingulorũ aureos indicant,ſummæ dimidiatæ,quæ omniũ aureos capit,& ex qua fit ſubductio,reſpondet.

QVÒD ſi de quatuor propoſita fuiſſet quæſtio, quorũ quiſque pecuniam ſciuiſſet aliorum,ſuam ignoraſſet:quia pecuniæ portio, quæ ad quenque ſpectaſſet ab ipſo ignorata, à reliquis tribus cognita fuiſſet,ſummæ omnium cognitæ in vnum additæ ter pecuniam omnium collegiſſent : atque ideo numerus ille ex omnibus collectus in tria ſecandus fuiſſet,vt numerus ſectionis omniũ pecuniam monſtraret.Ex quo ſectionis numero ſingulorum deinde partes per ſubductionem inueſtigandæ fuiſſent eo modo quo dictum eſt.Itidem ſi de quinque fuiſſet ſic inquiſitum(quia pecuniæ portio ad quenque ſpectans ab ipſo ignorata , à quatuor reliquis fuiſſet cognita)numerus ex cognitis ſummis coaceruatus pecuniã communem quater tenuiſſet,atque in quatuor fuiſſet ſecandus, vt omnium pecuniã patefaceret. Eodẽ modo ſi ſex fuiſſẽt, per quin-

que:ſi ſeptẽ, per ſex ſecũdus fuiſſet collectus ille numerus, ꝙ toties caperet ſingulorũ pecuniã:& ſic deinceps in infinitũ:quærẽdæque eſſent per ſubductionem partes ſingulorũ eo modo quo diximus.

Quæſtio XLIII.

SACERDOTEM tenentem in crumena pecuniam pauperibus erogandam mendici tres adeunt. is eorum inopiæ miſertus dimidium illius quod in crumena erat primo mendico cõtulit,& duos præterea nummos. Secundo verò donauit eius quod relictum erat, dimidium,atque vltra id nummos tres. Tertio quoque ſupra dimidium eius quod reſtabat, quatuor nummos dedit. quo factũ eſt vt vnicus nummus ſupereſſet. Libet inueſtigare quot nummi in crumena erant. Multo facilius eſt enarratu,quàm prima fronte videtur, ſi à tertio mendico numeros ordine retrogrado colligere incipias. Nam ſi ad vnicum nummum in crumena relictum addas quatuor,fient 5: quos propter dimidium tertio præter eos à ſacerdote donatũ duplicare oportet: ſic prodeunt 10. His tres nummos ſecundo vltra dimidium donatos addere debemus : & ſurgent 13. quos propter dimidium à ſacerdote ei collatũ duplicare eſt opus. qua ratione 26 fiunt. His ſi rurſus duos nummos ſupra dimidium primo datos addas, creabis 28: quos ipſos etiamnum duplicare neceſſe eſt propter dimidium primo datum. ſic denique 56 enaſcuntur: qui nummorum numerus in crumena erat. Idque ita habere probabis, ſi numerum illum collectum eo ordine diſtribuas quo ſacerdos fecit. Quippe ſi primo dones dimidium, ſuperſunt 28: ex quibus ſi duos amplius ei eroges, reſtãt 26. Iterum eos propter ſecundum dimidia, & manent 13: de quibus tres ei ſupererogati relinquunt 10. Eos rurſus propter tertium dimidia, & reliquos habes 5:quorum ſi 4 ei conferas,vnicus nummus reſtabit.

Quæſtio XLIIII.

QVI aureos ex regio cubiculo ſurripuerat, ſuſpectus ab oſtiario furti & detentus,eorum dimidium,vt elaberetur,elargitus eſt. oſtiarius inſontem putans,duos aureos ei reddidit. Iterum ſecundus oſtiarius, illum ſuſpectum habens,exitu prohibuit:cui fur dimidium eius quod ſuperfuit obtulit. is quoque inſontem exiſtimans,redditis aureis 4,illum dimiſit. Rurſus illum palatio exeuntem portæ ianitor comprehendit. huic etiam fur dimidium eius, quod reſtabat,velut cani offam obiecit. At is cæteris benignior di-

miſſo ſex aureos reſtituit. ſic demum fur elapſus aureos tantum 12 ex furto deportauit. Inueſtigemus quot aureos in vniuerſum ſurripuit. Res ſic extricabitur quemadmodum in proximo quæſito, vt ordine retrogrado à poſtremo ad primum tendamus: niſi quòd illic ad ſingulas duplicationes, propter aureos ſupererogatos, additione opus erat: hic ad ſingulas duplicationes, propter aureos reſtitutos, ſubductio neceſſaria eſt. Itaque ſi à 12 illis aureis ex furto deportatis, 6 à ianitore reſtitutos demas, ſuperſunt 6: quæ propterea quòd tertio fur dimidium dedit, duplicare oportet, & fient 12. Ab his propter 4, à ſecundo oſtiario reſtitutos ſubtrahamus 4, ſic 8 remanebunt. Ea deinde ideò duplicemus, quòd ſecundo fur dimidium contulit: ita ſurgunt 16. A quibus 2 ob id deducẽda ſunt, quia primus oſtiarius 2 reddidit. qua ratione relinquuntur 14. & quoniam primo oſtiario furti dimidium oblatum eſt, ea duplicentur, & prodibunt 28: qui numerus vniuerſos aureos ſurreptos capit. Vt autem probemus non erraſſe calculum, conuerſo ordine numerum hunc ad furis exemplum diſtribuamus: & de 28 primo oſtiario dimidiũ, quod eſt 14, offeramus. is nobis reddat 2, & fient 16. Horum dimidium ſecundo oſtiario demus, nempe 8, qui nobis 4 reſtituat: ſic habentur 12. Eorum deinde dimidium quod eſt 6, tertio ianitori offeramus. is 6 reddat, & rurſus fient 12, quæ ex vniuerſo furto reſtabant. Ad eundem modũ res explicabitur, ſi cuipiam inueſtigare libet quantum ſibi quiſque oſtiarius retinuit. Liquet nãque primum oſtiarium 12 ſibi ſeruaſſe, ſecundum 4, tertium ianitorem retinuiſſe nihil.

Quæſtio XLV.

QVANDO rotæ linea dimetiens, quam Græci diametron vocant, ſeptem pedes habet, quantus erit ambitus apſidis extremæ, & quoties in mille paſſibus rota circunuoluetur? In primis obſeruare oportet geometrica ratione ab Archimede deprehenſum eſſe, diametrum tertiam circuli partem & tertiæ paulominꝰ ſeptimam comprehendere. Nam dimetiens (vt ille ait) ſi in partes ſeptuageſimas ſecetur, capit vltra tertiam circuli partem, minus quàm decem ſeptuageſimas, quæ partem ſeptimam faciunt. At ſi in ſeptuageſimas primas diuidatur, vltra tertiam circuli partẽ plus capit quàm decem ſeptuageſimas primas, quæ partes ſunt ſeptuageſimis minores, nec ſeptimã partem implent. Propius accedere non potuit Archimedes, tametſi multa conatus, vt diametri ad circulũ

rationem inueniret: quæ ſi comperta eſſet, iam quadratura circuli fuiſſet inuenta : quam aſſequi deſperarunt plerique omnes philoſophi qui adhuc fuerunt, & in primis Ariſtoteles ipſe. Vltra Archimedem penetrare nemo hactenus potuit. Itaque cũ omnis circulus ter diametrum & diametri paulo minus ſeptimam colligat, (ſed quãtulo minus, adhuc non ſit compertũ) illud faciamus quod Geometræ ſolent, vt pro ſeptima, cui paululum deeſt, ſeptimã ſumentes integram, perinde cõputemus ac ſi dimetiens tertiam circuli partem, & tertiæ ſeptimã capiat. Qua ratione ſi extremæ apſidis ambitum ex diametro colligere velimus, multiplicare oportet ſeptem, qui numerus eſt diametri, in tria, & numero producto addere vnam ſeptimam. ita fient vigintiduo. quæ ratio erit apſidis rotæ ad diametrum: & tot pedes vna circumuolutio capiet. Quod poſtquam exploratũ eſt: per numerum illum 22 ſecare oportet illum pedũ numerum, quẽ mille paſſus continent. is autẽ eſt quinque millia. (nã paſſus, vt ait Columella, quinque pedes habet) Quo fiet, vt ſectionis numerus $227\frac{6}{22}$ proferat, quæ faciunt $\frac{3}{11}$. Toties ferè circunuoluetur rota in mille paſſibus. Propius id ſciri nõ poteſt propter certam diametri ad circulum rationem adhuc incõpertam. Et vix tandẽ in immenſo ſpatio deprehendi poteſt error.

Quæſtio XLVI.

QVIS non putaret normæ fabricandæ artificium delegandum eſſe fabris? at emendatæ normæ faciendæ ratio tota pendet à numeris: quã Pythagoras inueniſſe traditur. Ea autem eſt huiuſmodi. Porrò ſi ſumãtur regulæ tres, è quibus vna longa ſit pedes tres, altera pedes quatuor, tertia pedes quinque : hæque regulæ inter ſe cõpoſitæ ſummis cacuminibus alia aliam tangant, trigoni habebunt ſpeciem, & normam emendatam formabunt. Nam ſecũdum Euclidis regulã, vbi quod ab vno triãguli latere in ſeipſum ducto producitur, æquale reperitur duobus quadratis, quæ à duobus reliquis lateribus deſcribuntur, rectus eſt angulus cui latus illud opponitur. Itaque ſi huius trigoni ſingula latera in ſeipſa multiplices, numeróſque ita procrees quadratos: qui ex his maximus erit, tantum in ſe continebit, quantum duo reliqui quadrati ſimul additi: quippe tria in ſe ducta educunt nouẽ: quatuórque item in ſe multiplicata ſexdecim : qui numeri in vnũ additi vigintiquinque proferunt. At ſi quinque in ſeipſa ducantur (quod latus è tribus maximum eſt) itidem enaſcentur viginti quinque: qui numerus

æqualis eſt duobus quadratis reliquis. Id Pythagoras cũ inueniſſet, non dubitans ſe à muſis in ea inuentione adiutum, hoſtias his immolauiſſe dicitur. Ab illo igitur certa ratio normam fabricandi per numeros deprehenſa eſt: cum ante eum fabri normam faciẽtes vix magno labore rem ad verum perducerent. Nihil autem refert, quod menſuræ genus numeretur ab ipſis numeris normam efficientibus: nam ſiue vnciæ fuerint, ſiue palmi, ſiue pedes, ſiue cubiti, ſiue aliud quidlibet, eorũ ſumma cacumina ſimul coeuntia normam deformabunt. Iam quod hi numeri primarij, tria, quatuor, & quinque, in quibus normæ ratio primum inuenta fuit, perficiunt: itidem id præſtabunt omnes numeri maiores eandẽ rationem habentes: cuiuſmodi ſunt triginta, quadraginta, quinquaginta: quorum qui maximus eſt, in ſe ductus quadratum producet æqualem duorum reliquorum quadratis.

30	40	900	50
30	40	1600	50
900	1600	2500	2500

CVTHEBERTI TONSTALLI IN LIBRVM QVARTVM PRAEFATIO.

QVI in numerorum abdita penetrare volet,proportionibus dinoſcendis operam dare debet:quarum non ſolum in numeris,verumetiam in tota rerum natura tanta vis eſt, vt ſine ea nihil vel ad vſus hominum vtile,vel ad aſpectus amœnum, reperiri poſſit: id quod,quocunque oculos tuleris,facile intelligas. Principio quæ ad habitationem noſtram ædes fabrefactæ ſunt, niſi laxitatē longitudini atque altitudini cōgruentem habeant,inamœnæ & incōmodæ ab omnibus exiſtimantur. Si nimis ſunt luminoſæ,præterquam quòd ſub dio habitare videmur,ad frigora arcenda tēpeſtatéſque ferēdas inutiles putātur. Si lumina in his vel anguſta ſunt, vel rara, carceris ſpeciem referunt. Si parietes nimium craſſi,caſtella videntur. Cōtra ſi nimium tenues,parum tutas à furibus credimus. Ita niſi ſingulæ ædium partes ſibi proportione reſpōdeant, earū gratia tota perit. Pictorū verò ars tota,quæ ad hominū oblectationem inuenta, magnóque in pretio apud veteres habita eſt, nihil præſtabit gratū,ſi quæ illuſtrari deberent, fuſcis obſcurētur coloribus:ſi quæ obſcurari,fiant illuſtria:ſi in corpore depingendo mēbra alia enormia,alia exilia inter ſe nō conſentiant. quippe riſum,nō voluptatem irritus labor pariet. At ſi colores floridi tēperentur auſteris,candidi fuſcis, fulgentes vmbroſis, vt quæ longinqua ſunt,receſſiſſe videātur:quæ propinqua,ſic emineāt,vt extare videri poſſint: ſi vniuerſa lineamenta ſibi pro portione cōſentiant,neminem non ea ars ſummopere delectabit. Qui diſciplinæ militari dant operā,& arma corporibus, & tela tormentis habilia quærunt. Qui claſſem ædificant,armamēta pro nauium parāt magnitudine. Sarcinatores qui veſtimenta faciunt, ſic ea aptare ſtudent,vt corporū ſeruent ſymmetriam. Cætera itidē artificia proportionum cognitionē vniuerſa poſtulant. Quid medici,qui pharmaca dant ægrotis? an non eorum ſumma cura eſt, vt poſtquam morbi vim ſagaci ſolertia deprehenderūt,ſic calida frigidis, ſic humida ſiccis miſceāt, vt ægroti corporis temperamento cōueniant? id quod ignoratis proportionibus fieri nequaquam poteſt. Ipſa etiam ciborum noſtrorum condimenta,dum ſani ſumus, niſi ſalſa recentibus,acria dulcibus,auſtera lenibus temperentur,ingrata palato, atque inſipida comperiemus. Ita nec corporis humani ſanitas incolumis ſeruari, nec labefactata refici, ſine proportionū no-

titia facile poterit: vt non abs re exiſtimari poſſit, corpora noſtra non magis ex quatuor elementis,quàm eorũ proportione cõſtare. Denique omniũ opifex deus & mũdi fabricæ & rebus in ea creatis vniuerſis eam formã dedit, vt cuncta inter ſe ſymmetriã tenerent:id quod in ſingulis licet cernere,ſiue cælum,ſiue terram ſpectes. Quocirca ſacræ literæ,menſura,numero,& pondere, quibus in rebus maxime vis proportionũ eminet,deum omnia diſpoſuiſſe teſtantur.Et ne in confirmandis his quæ in confeſſo ſunt, longius immoremur:cum palàm ſit nihil vſquã vel aſpectu decorum, vel vſu gratũ eſſe,cui deſit proportio:propterea cognitionem eius ad vitam tranſigendã operæpretium erit expetere. Quod cum ad cætera negotia cõmodius gerenda,tùm præcipue ad artem ſupputandi diſcendam,plurimũ conducet:in qua ſine proportionũ notitia nihil arduũ explicari poteſt. Igitur in hoc libro genera proportionum paulo altius in primis repetere eſt animus. Deinde earum ſubijciemus additionem, ſubductionem, multiplicationẽ & ſectionem. Poſtremo regulas quaſdã ad ſupputationem vtiles, quæ ſine his ne intelligi quidem queunt,ſtudioſis prodemus.

QVANTITATIS SPECIES.

QVANTITATVM ſpecies duæ reperiuntur. altera continua eſt,quæ magnitudo dicitur.altera diſcreta, quæ ſiue multitudo,ſiue numerus appellat. Ipſa etiã magnitudo ſpecies habet duas: altera eſt immobilis, quã Geometria tractat: altera mobilis,de qua Aſtrologia cõſyderat.Itidẽ multitudinis duæ ſpecies occurrunt.earũ altera per ſe cõſyderatur, de qua differit Arithmetica: altera refertur ad aliud:eã muſica pertractat.Numerus verò eſt vnitatũ collectio.

De Proportione & eius generibus.

PROPORTIO eſt duarum, quantæcunque ſunt, eiuſdem generis quantitatum,certa alterius ad alteram comparatio, atque habitudo.propoſitis nanque quibuſuis duabus quantitatibus, neceſſe eſt alteram altera vel maiorem, vel æqualem, vel minorem eſſe. Illa itaque habitudo qua ſeſe vel æqualiter,quando ſunt æquales, mutuo reſpiciũt:vel inæqualiter,quando earum altera maior reliqua,aut minor eſt,appellatur proportio:quæ nihil aliud eſt,quàm earum inter ſe comparatio. Eiuſdem quoque generis quantitates

eſſe debent,inter quas cadit proportio.veluti duo numeri,duæ lineæ,duæ ſuperficies,duo corpora, duo loca, duo tempora: neque enim linea maior aut minor ſuperficie eſt, aut corpore, nec tempus loco maius eſt, aut minus: ſed lineã lineã,ſuperficies ſuperficie,corpus corpore:ſola enim quæ vnius ſunt generis,inter ſe cõparabilia ſunt. Proportio autem habitudo certa eſt: quaſi diceres, ſic determinata,vt hæc ſit,& non alia. Neque enim neceſſe eſt vt omnis duarum quãtitatum habitudo vel à nobis ſciatur , vel à rerum natura. Quippe proportio apud veteres in tria ſecatur genera:quorum vnum eſt diſcretorum,videlicet numerorum,quod vocant Arithmeticum. Alterum continuorum,quod Geometricum appellant. Tertium ſonorũ & cõcentuum, quod harmonicũ nuncupant,ex illorum vtroque mixtũ: quòd muſica in pauſis & prolationibus tempus ſpectet : in vibrante vocum notarúmque diuiſione,numeros.Et quia ad inſtitutum noſtrum tertium hoc genus non attinet,parum admodũ in hoc libro de eo dicturi ſumus. In numeris autẽ omnis minor eſt pars aut partes maioris: quamobrem in eis omnibus certa eſt habitudo & nota. At verò in continuis proportio eſt magis larga. Nonnunquam enim in eis minor quantitas eſt pars aut partes maioris:& taliũ omnium,interuenientibus atque adiuuantibus numeris,nota eſt proportio, quæ & rationalis vocatur. Huiuſmodi autem quantitates ſiue cõmunicantes,ſiue cõmenſurabiles dicuntur: quia eas vna & eadem quãtitas neceſſario metitur. Quo fit vt omnes numeri ſint communicãtes, quòd omnes eos metiatur vnitas. Sæpenumero autẽ in continuis minor quantitas nõ eſt pars aut partes maioris: & in talibus proportio neque nobis nota eſt,nec naturæ: qualis eſt inter quadrati diametrum & eius coſtam,cum nulla vnquam menſura,quæ vtrique ſit cõmunis,inueniri poſſit, tametſi diametri quadratũ duplũ ſit ad quadratum coſtæ.Huiuſmodi autem proportio irrationalis nuncupatur,& hæ quantitates incõmunicantes, ſiue incõmenſurabiles.Vnde fit vt quæcunque proportio occurrit in numeris,eadem reperiatur in omni genere continuorum : puta in lineis,ſuperficiebus,corporibus,& temporibus.At non ẽ cõuerſo idem accidet.Infinitæ nanque reperiuntur in cõtinuis proportiones,quas numerorum natura non ſuſtinet. Cæterum quæcũque proportio in vno genere cõtinuorum accidit, eadem comperietur in omnibus aliis. Nam qualitercunque ſe habet aliqua linea ad quamlibet aliã,ſic ſe habet quælibet ſuperficies ad aliquã aliam,& quodlibet

corpus ad aliquod aliud, ſimiliter & tempus: non autem ſic ſe habet quilibet numerus ad aliquē alium. Quocirca in cōtinuis proportio magis larga eſt, quàm in diſcretis. Quo fit manifeſtum, proportionem Geometricā maioris abſtractionis, quàm Arithmeticā eſſe. Omnes enim proportiones, circa quas Arithmetica verſatur, rationales ſunt: de quibus hoc libro maxime dicturi ſumus. Geometria verò & rationales & irrationales æqualiter conſyderat.

Proportionis rationalis ſpecies.

PROPORTIONIS rationalis ſpecies ſic dignoſces. Omnis quantitas ad aliam cōparata aut ei æqualis, aut inæqualis reperitur. Quantitas æqualis eſt quæ nec ſibi cōparatā excedit, nec ab ea exceditur. veluti cubitus ad cubitū collatus: pes ad pedē: numerus quaternarius ad quaternariū. Inæqualis autē quātitas, quæ ſibi cōparatā excedit, proportionē ad illam habet inæqualitatis maioris: veluti cubitus ad pedē, numerus quaternarius ad binarium. Quòd ſi ab illa exceditur, minoris ad illam inæqualitatis proportionem habet: veluti pes ad cubitū: numerus binarius ad quaternarium.

MAIORIS verò inæqualitatis ſpecies ſunt quinque, quarū tres ſunt ſimplices, videlicet multiplex, ſuperparticularis, & ſuperpartiens. Duæ verò reliquæ compoſitæ, nempe multiplex ſuperparticularis & multiplex ſuperpartiens, ex prima & duabus reliquis cōficiuntur. Quibus rurſus aliæ quinque ſpecies inæqualitatis minoris opponuntur: quæ eadem ſeruant nomina, præterquā quòd præpoſitio hæc (ſub) in ſingulis nominibus apponitur, vt ſubmultiplex, ſubſuperparticularis, ſubſuperpartiens, & ſic deinceps.

PORRÒ vt de primis quinque ſuo ordine dicamus, Quantitas ad aliam multiplex eſt, quæ eam pluries integram continet. Et ſi bis eam capit, dupla dicitur: ſi ter, tripla: ſi quater, quadrupla: ſícque in infinitas ſpecies variatur. Vt igitur ſciatur quomodo ſingulæ eius ſpecies generantur, facta numerorum ſerie naturali, veluti 1.2.3.4.5.6.7.8.9. quilibet eorum, qui præcedentem per vnitatem ſuperat, ſub alia & alia ſpecie multiplex eſt ad vnum: ſecundus enim duplus eſt, tertius triplus, quartus quadruplus, & ſic deinceps. Et ſicut in infinitum in hoc naturali numerorum progreſſu ſpecies multipliciter variantur, ita etiam in qualibet ſpecie generari poſſunt infiniti numeri.

DVPLORVM in primis generatio huiuſmodi eſt, Sicut enim primus numerus par, videlicet binarius, duplus eſt ad vnitatē, ita

ſecundus par qui eſt quaternarius,ad binarium numerum duplus erit:& tertius par,qui eſt ſenarius,ad ternariū: quartus par,qui eſt octonarius, ad quaternarium:quintúſque par,qui eſt denarius, ad quinarium numerum duplus erit: & ſic deinceps in infinitum in generatione duplorum progreſſus fieri poteſt.

TRIPLORVM autem generatio ſic obſeruatur, In naturali numerorum ſerie poſt ternarium,qui vnitati triplus eſt, duobus intermiſſis,puta quaternario & quinario,ſenarius qui ſequitur, triplus ad ſecundum numerum naturalis ſeriei binarium comperietur. Iterū etiam omiſſis alijs duobus, videlicet ſeptenario & octonario peruenietur ad nouenarium,qui triplus eſt tertij numeri.Et rurſus 10 & 11 intermiſſis, duodenarius triplus erit ad quartū numerum: ad quē modum ſine fine progredientes, triplos inueniemus.Erítque triplorum cōtinue vnus impar,alius par alternatim.

QVADRVPLORVM verò generatio incipit, ſiquis poſt quaternarium tres numeros, veluti quinarium, ſenarium & ſeptenarium intermittat.quartus enim occurrit octonarius, qui ad binarium numerum,qui ſecundus eſt,quadruplus reperitur.At rurſus 9. 10. & 11 intermiſſis,duodenarius numerus ternarij numeri,qui tertius eſt,quadruplus erit:& ſic deinceps. ſinguli autem quadrupli numeri ſunt pares,ſicut in duplis euenit.

Similiter ſi quatuor numeros intermittas, quintupli inueniuntur:ſi quinque,ſextupli: ſi ſex,ſeptupli: atque ita ſemper proportionis generandæ denominatio per vnitatē ſuperabit numeros omittendos. Omnium autem numerorum multiplicium, quorum denominatio eſt impar,vnꝰ par & alius impar alternatim erit: ſed multiplicium,quorum denominatio eſt par,ſinguli pares erunt.

QVANTITAS ſuperparticularis ad aliam dicitur, quæ ſemel eam continet,& aliquam eius partem. Et ſi eam & eius dimidium continet,vocatur ſeſquialtera:ſi eam & eius tertiam,dicitur ſeſquitertia:ſi eam & eius quartam, erit ſeſquiquarta: & ſic in infinitum nomina ducere licet.In comparatione tali numeri maiores dicuntur duces,minores verò comites.Generantur autem ſuperparticulares proportiones ad hunc modum.

Et primum quidem de ſeſquialteræ origine dicamus.Diſpoſitis vno ordine ſingulis numeris tertiam partem habentibus, qui per continuam additionem ternarij in infinitum procedunt ,ſicuti 3. 6.9.12.15.18.omnes duces procreabuntur proportionis ſeſquialteræ: quibus ſi ſinguli numeri pares ſua ſerie ſubſcribantur,proue-

nient omnes eiuſdem proportionis comites, ſi primum primo, ſecundum ſecundo conferamus: & ſic deinceps.

3.6.9.12. 15.18.21.
2.4.6.8. 10.12.14.

ITEM diſpoſitis ſingulis numeris quartam partem habētibus, qui per quaternarij continuam additionem procreantur, veluti, 4.8.12.16. prodibunt omnes duces proportionis ſeſquitertiæ, qui omnes numeros triplos ſiue tertiā partem habētes comites habebunt, ſi primus primo, ſecūdus ſecundo cōparetur: & ſic deinceps.

4.8.12.16.20.
3.6. 9.12.15.

SIMILITER generatur proportio ſeſquiquarta, ſi ad ſingulos quadruplos ſinguli quintupli comparentur,

5.10.15.20.
4.8.12. 16.

Atque ita deinceps procedetur per proportionis ſuperparticularis ſingulas alias ſpecies.

ACCIDIT autem proportioni ſuperparticulari admirāda hæc proprietas, vt in quibuſcunque numeris huius ſpeciei primus dux primum comitem per ſolam vnitatem tranſcendat, ſecundus ſecundum per binarium, tertius tertium per ternarium, & ita deinceps per ordinem fit aſcenſus. Poteſt autem tabella depingi, in qua proportionum tam multiplicium quàm ſuperparticularium, quotquot voluerimus, ſpecies generentur. Cuius formam ſuprà libro primo de numerorū multiplicatione præcipientes deſcripſimus. Hic autē iterum eā oculis ſubijcere putamus operæpretium.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

IN HAC tabellæ formula ſecundum longitudinem & latitudinem eadem eſt numerorũ progreſſio. Itaque ſi ſecundus ordo ſiue in longitudine ſiue in latitudine ad primum cõparetur, accidit continua generatio primæ multipliciũ ſpeciei, videlicet duplorũ: ſi enim 2 ad 1, aut 4 ad 2, aut 6 ad 3, & ita vlterius comparemus, prouenit vbiq; dupla proportio: vnde & in iſta proportionis ſpecie, primus dux primum comitem per ſolam vnitatem ſuperat, ſecundus ſecundum per binarium, tertius tertium per ternarium, & ita per ordinem fit aſcenſus. Itidem ſi tertius ordo ad primũ conferatur, generabitur ſpecies tertia multiplicium, nempe proportio tripla: ſuperabítque primus dux primũ comitem per binarium, ſecundus ſecundũ per quaternarium, & ita per incrementum binarij continue fit progreſſus. Ad hæc ſi quartum ordinem compares ad primum, quadruplorum generatio proueniet: & primus dux primum excedet comitem per ternarium, ſecundus ſecundum per ſenarium, & ita per additionem ternarij cõtinua fit accumulatio: ſicque per ſingulas multiplicium ſpecies procedere in infinitũ licet.

Generatio verò ſuperparticularium ad hunc modum cōſyderabitur,Si enim tertium ordinem cōparemus ad ſecundū,accidet procreatio continua proportionis ſeſquialteræ.Item ſi quartū ordinē ad tertium cōferamus,prodibit proportio ſeſquitertia:ſi quintum ad quartum,ſeſquiquarta generabitur.Et ita per ordinem ſingulæ ſuperparticulariū ſpecies procreātur:ſuperabitq; in omni eius ſpecie primus dux primū comitem per vnū,ſecundus ſecundū per 2, tertius tertium per 3,& ſic deinceps:quēadmodū in duplis euenit.

ACCIDVNT autem prædictæ formulæ proprietates admirandæ quinq;:quarū prima hæc eſt,Numeri iſtius formulæ ab vnitate angulariter ſecundū quadrati diametrū deſcendentes, puta 1.4.9. 16,atque ita deinceps,ſinguli ſunt quadrati:ſicq; ad ſingulos quadratos deuenire licet,ſurgentes ex numerorū ductu in ſeipſos. Secunda formulæ huius proprietas eſt: ſinguli eius numeri longilateri ſunt,qui immediate numeros angulares circuncingunt. Sunt autem numeri longilateri,qui ex duorum numerorū ductu,vnius in alterū producuntur, quorum vnus alterū ſola vnitate ſuperat. Veluti circa 4 ſunt 2 & 6 : quorū binarius ex ductu vnitatis in 2, & ſenarius ex ductu 2 in 3 procreatur.Similiter circa 9,ſunt 6 & 12: ſicque per ordinem inuenies omnes numeros longilateros, circa numeros angulares. Tertia huius formulæ proprietas eſt, Si duo numeri alicui numero angulari circūpoſiti coniunctim addantur ad duplū ipſius numeri angularis,ſurget numerus quadratus. veluti additis 2 & 6 ad bis 4,prodeunt 16.Quarta proprietas eſt,Si duo quadrati angulares proximi ſimul addantur ad duplum numeri ab ipſis circunſepti,numerus naſcetur quadratus. nam additis 4 & 9 ad bis 6,producūtur 25.Quinta proprietas eſt, Vbicunque in hac formula reperitur aliqua figura quadrata, idem ex ductu angulorum oppoſitorū in oppoſitos producetur: puta ſi 4 in 9 ducas, aut 6 in 6(nam idē vtrobique exibit) vel ſi 3 in 15 ducas, aut 5 in 9,idem producetur. Multa alia admiranda atque vtilia in hac tabellæ formula reperiri poſſunt,qualia ſunt ea quæ de multiplicatione & diuiſione per eam facienda, primo libro monſtrauimus.Verum his omiſſis,ad propoſitum reuertamur.

QVANTITAS ad aliam ſuperpartiēs dicitur,quæ ipſam ſemel intra ſe capit,& inſuper aliquot eius partes,de quibus ſimul ſumptis nō ſit maioris quātitatis pars vna aliquota: quæ ſpecies tā ex numero partiū ſuperfluentiū,q̄ ex earū denominatione variatur in infinitū. Ex numero partium, Veluti ſi numerus maior minorem

continet & eius partes duas,dicitur ſuperbipartiẽs:ſi verò eam capit,& tres eius partes,ſupertripartiẽs dicitur.& ſic deinceps. Item ex denominatione partium, puta ſi maior minorem ſemel cõtinet & duas eius partes, quarum quælibet tertiam facit, vocatur ſuperbipartiens tertias,vel magis germano vocabulo ſuperbitertius. & ſi minorem includit,& tres eius partes,quarũ quælibet quarta eſt, dicitur ſupertripartiens quartas, vel magis ſupertriquartus. neque in tali progreſſu ſtatus aliquis erit. Huiuſmodi autem porportio, vbi tam numerus partium quàm earũ denominatio variatur,continue generari poteſt, ſi ſeries vna numerorum fiat à ternario incipiens, & quantunuis vlterius ſecundũ ordinem naturalem procedens. Deinde fiat alia ſeries:in qua ſumpto initio à quinario numero,ſinguli ſequentes impares per ordinem ſubſcribantur.

3.4.5. 6. 7. 8. 9.10.11.12.
5.7.9. 11. 13.15.17.19.21.23.

Nam ſi primum ordinis inferioris ad primum ſuperioris conferamus,proportio orietur ſuperbipartiẽs tertias, ſiue ſuperbitertia: ſi ſecundum ſecundo, ſupertripartiens quartas, ſiue ſupertriquarta. & ſic ſine fine. Quòd ſi ſingulos vtriuſque ſeriei numeros duplicemus,ſecundi numeri prodibunt ſub eiſdem proportionibus conſtituti. ſunt enim 10 & 6 ſecundi numeri, inter quos eſt ſuperbitertia proportio. Similiter ſi duplicemus duos ſecũdos, fiũt 8 & 14 qui ſunt ſecũdi numeri,inter quos cadit ſupertriquarta proportio:& ſic deinceps. Itidem ſi vtriuſque ſeriei numeros triplicemus:tertij numeri naſcentur proportionem eandem vendicantes. vt 15 ad 9,21 ad 12. & ſic in infinitum progreſſus fieri poteſt per ſingulas ſpecies. Ex hoc Arithmetici deprehẽdũt hic dormitaſſe Boetium non incelebrem authorem,qui in generatione continua huiuſmodi numerorum dicit ſecũdum ducem & ſecundũ comitem, inter quos eſt proportio prima ſupertriquarta,debere triplicari: & tertium ducem & tertium comitẽ, inter quos eſt proportio ſuperquadriquinta, quadruplicari, & ita deinceps: vt per hoc naſcantur ſecundi numeri ſub eiſdem proportionibus conſtituti. Male etiam hic admonet numeros triplicatos iterum triplicari debere, quadruplicatos iterum quadruplicari,vt cæteri numeri ſub eiſdem proportionibus procreentur. Præterea Boetius in generatione ſuperpartientium de his tantum admonuit, in quibus denominatio partium per vnitatem ſolam numerum earundem ſuperat: veluti de ſuperbitertia,ſupertriquarta,ſuperquadriquinta,& huiuſmodi:

Boetij error

nec docet quomodo ſuperbiſeptima vel aliæ huiuſmodi generentur. Et ideo vt de cuiuſlibet ſpeciei generatione inſtruamur, capiamus numerũ denominantẽ partes proportionis propoſitæ: qui numerus erit primus comes proportionis illius. cui deinde addamus numeratorẽ partiũ proportionis eiuſdẽ, ſic procreabim⁹ primũ ducem. Verbi gratia. ſi proportio ſupertriſeptima generanda proponatur, capimus 7. cui ſi addamus 3, prodibũt 10. ſunt itaque 10 & 7 minimi numeri, inter quos ꝓportio ſupertriſeptima reperitur. quibus duplicatis, exeũt numeri ſecũdi eiuſdẽ proportionis: & triplicatis, fiũt tertij. id quod per hãc regulam fit manifeſtum: videlicet, quia multipliciũ & ſubmultiplicium proportio ſemper eſt eadem.

QVANTITAS multiplex ſuperparticularis ad aliam dicitur, quæ eam pluries quàm ſemel & aliquam partem eius aliquotam continet: & hoc variatur tam ex parte multiplicis, veluti dupla ſuperparticularis: quàm ex parte ſuperparticularis, vt dupla ſeſquialtera, tripla ſeſquitertia. Vbi autem ſtãte denominatione ex parte multiplicium ſpecies ſolummodo ex parte ſuperparticularium variantur, ſicut in dupla ſeſquialtera, dupla ſeſquitertia: fiet eorum generatio per hunc modum, Diſponantur numeri à binario ſecũdum ordinem naturalem: quibus ſinguli impares à quinario ſubſcribantur. cõparãtes itaque primum ad primum, habebimus proportionem duplam ſeſquialteram: ſecundum ad ſecundum, duplã ſeſquitertiam: tertium ad tertium, duplam ſeſquiquartam.

2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
5.	7.	9.	11.	13.	15.	17.	19.

Pro generatione autem triplorum ſuperparticularium fiat primus ordo vt prius: & in ſecundo ordine poſt initium à ſeptenario ſumptum, numeri continue per additionem ternarij augeantur.

2.	3.	4.	5.	6.	7.
7.	10.	13.	16.	19.	22.

At pro quadruplorum ſuperparticulariũ generatione, ſtãte priori ordine, numeri in ſecundo à 9 ſumẽtes initium per additionem quaternarij continuè augeantur: & ita deinceps, quantuncunque voluerimus, procedemus. poſtquã verò in prædictis ordinibus numeri primi & minimi in ſuis proportionibus conſtituti ſunt, ſi eos duplicauerimus, numeri naſcentur ſecundi: ſi eos triplicauerimus, tertij, eiſdem proportionibus congruentes.

2.	3.	4.	5.	6.	7.
9.	13.	17.	21.	25.	29.

QVANTITAS ad aliam multiplex ſuperpartiēs dicitur, quæ eam pluries quàm ſemel, & eius aliquot partes continet: ex quibus non fit maioris quantitatis vna aliquota: quæ ſpecies tam ex parte multiplicis, quàm ex parte ſuperpartiētis in infinitum variatur. Accidit autem huiuſmodi proportionis generatio ad hunc modū, Propoſita quauis tali proportione, capiatur numerus denominans partes minoris numeri in eadem, vt ille ſit primus comes: deinde vel duplicetur, vel triplicetur ille numerus ſecundum denominationē multiplicis in illa proportione. taliſque numero ſic multiplicato addātur vnitates ſecundū numerum partiū proportionis propoſitæ: & primus dux in ea proportione naſcetur comparādus ad primū comitē. Verbi gratia. in proportione tripla ſuperquintiſeptima capiantur 7. quibus triplicatis, & 5 ſuperadditis, ſurgent 26. Itaque 26 & 7, ſunt primi numeri ſub proportione propoſita conſtituti. Quibus duplicatis naſcentur ſecundi: triplicatis, tertij: & ita deuenire licet ad omnes numeros ſub ea proportione conſiſtentes. Annotandum autem eſt ſingulas ſpecies harū quinque in formula quadrilatera ſuperius ſcripta inueniri poſſe, ſi in immenſum vlterius extendatur. Ad primum enim ordinem reliqui ſinguli cō parati ſingulas multiplicis ſpecies procreabunt. Item ſi tertium ordinem ad ſecundum, & quartum ad tertium, & ita vlterius conferamus, mille ſuperparticularium ſpecies orientur. Quòd ſi quintum ordinem ad tertium, & ſeptimum ad quartum, & nonum ad quintum comparemus, & ita progrediamur, habebimus ſingulas ſpecies ſuperpartiētium. Item ſi ſecundū ordinem ad quintum, & ad ſeptimum, & ad nonum, & ita deinceps, contulerimus, multiplicis ſuperparticularis ſpecies variæ prodibunt. At multiplicium ſuperpartiētium procreabuntur ſpecies, ſi ad tertium ordinē octauus, & vndecimus, & quartusdecimus, atque ſecundum eam rationem alij referantur.

HAE quinque ſpecies, quæ iam ſunt deſcriptæ, alias etiam quinque, quæ ſibi ſunt oppoſitæ, manifeſtant. Etenim hoc tantum inter eas intereſt, vt cum per ſingulas has ſpecies maior numerus, ſicuti diximus, ad minorem comparetur: in illis contrà fiat, vt minor conferatur ad maiorem, atque ideo (ſub) præpoſitio ſingulis earum nominibus apponatur. Cæterum illarum generatio & harum eſt eadem.

DE PROPORTIONALITATE.

P ROPORTIONALITAS eſt proportionum inter ſe ſimilitudo. Ea autem bifariam ſecatur: altera nãque proportionalitas continua eſt, altera incontinua, quam eãdem ſeparatam appellare licet.

CONTINVA proportionalitas eſt, cũ quotlibet quantitatum eiuſdem generis, qua proportione prima antecedit ſecundam, eadem quælibet aliarum proximo conſequentem antecedit. Exemplum in numeris. ſicut 8 ſe habent ad 4, ſic 4 ad 2, & 2 ad 1. Complurium autem quantitatum continue proportionalium quælibet & antecedens & conſequens eſt: hoc eſt, & vicem primi extremi in proportione & ſecundi ſupplet, excepta prima quæ ſolũ antecedit, & poſtrema quæ tantum cõſequitur. Et in hac quidẽ proportionalitate, propter cõtinuationẽ proportionũ, neceſſe eſt omnes quantitates eſſe eiuſdem generis: eo quòd inter diuerſorum generum quantitates non exiſtat proportio. Hæc verò proportionalitas in paucioribus quãtitatibus, quàm in tribus, inueniri nequit: quanquam etiam in illis media quantitas, dum bis repetitur, vicẽ ſubdit duarum.

INCONTINVA autem proportionalitas eſt, cũ quatuor quãtitatum, qua proportione prima antecedit ſecundam, eadem tertia antecedit quartam. Exemplum in numeris. ſicut 8 ſe habent ad 4, ſic 6 ad 3. eritque earum quantitatum quælibet aut tantum antecedens, aut tantum conſequens. Et quia prioris proportionis extremum, quod conſequens eſt, non continuatur antecedenti, quod eſt prius extremum proportionis ſecundæ: neceſſe non eſt vt omnes quatuor ſint generis eiuſdem, ſicut in proportionalitate continua erat. ſed fieri poteſt vt ſint eiuſdem generis, & fieri poteſt vt ſint diuerſorum. Sicut enim lineam duplam aut triplam ad lineã reperiri contingit: ita ſuperficiem ad ſuperficiẽ, corpus ad corpus, tẽpus ad tempus, numerum ad numerũ. Hæc verò proportionalitas in paucioribus quãtitatibus, quàm in quatuor inueniri nequit.

PORRÒ in proportionibus extrema ipſa ſiue antecedunt, ſiue conſequuntur, termini ab Arithmeticis nuncupantur.

QVANTITATES autem, quarum proportio eſt ſimilis, proportionales vocantur.

O MNIS autem porportionalitas, ſiue continua ſit, ſiue ſeparata, ſex modis inter argumentandum variari poteſt.

Quantitates enim inter quas ſimilitudo eſt proportio-

num, itidem ſimilium proportionum erunt, etiam ſi comparatio quæ ab antecedente quantitate ad conſequentem facta erat, econuerſo à conſequente ad antecedentem fiat. Quæ proportionalitas, cõuerſa nuncupatur, quòd quantitates antecedentes in cõſequẽtes & cõſequẽtes in antecedentes cõuertantur. Exemplũ demus in numeris. ſicut 8 ſe habent ad 4, ſic 6 ad 3. eadem etiã ſimilitudo è cõuerſo eueniet: vt ſicut 4 ſe habent ad 8, ſic 3 ad 6 ſe habeant.

IN quantitatibus ſimilium proportionum, quando earum antecedentes ad ſuas conſequentes comparãtur, proportionum omnino ſimilitudo cadet: etiam ſi permutatim quantitas vnius antecedens ad alterius antecedentem, & conſequens vnius ad alterius conſequentem conferatur. Quæ proportionalitas, permutata vocatur: in qua antecedens proportionis ſecundæ fit conſequens primæ: & conſequens primæ fit antecedens ſecundæ. Exemplum in numeris. ſicut 8 ſe habent ad 4, ſic 6 ad 3. Quare etiã permutatim, ſicut 8 ſe habent ad 6, ſic 4 ad 3. Ex quo videre licet in permutata proportionalitate id euenire, vt ambo extrema primæ proportionis fiant antecedentia, & ambo extrema ſecundæ conſequentia.

CONIVNCTA verò proportionalitas dicitur, quoties ſicut vnius proportionis quantitas antecedens cum ſua conſequente cõiuncta ſe habet ad ſuam conſequentem: ſic etiam alterius proportionis quantitas antecedens cum ſua conſequẽte coniuncta ſe ad ſuam conſequentem habet. Quæ coniuncta proportionalitas ex ſimilitudine proportionum infertur. Exemplum in numeris. ſicut 8 ſe habẽt ad 4, ſic 6 ad 3. Quocirca ſicut 8 & 4 coniuncta, ſe habent ad 4: ſic 6 & 3 coniuncta, ſe habent ad 3.

DISIVNCTA proportionalitas eſt, in qua de quantitatibus cõiunctis ad cõſequẽtes ſuas collatis, comparationis illatio fit etiam ad diuiſas. Exẽplũ in numeris. ſicut 8 & 4 ſe habẽt ad 4: ſic 6 & 3 ſe habẽt ad 3. Quamobrem etiam ſicut 8 ſe habent ad 4: ſic 6 ad 3.

EVERSA proportionalitas eſt, quando ſicut vnius proportionis quantitas antecedens cum ſua conſequente coniuncta ſe habet ad ſuam antecedentem, ſic etiam alterius proportionis quantitas antedecens cum ſua conſequente coniuncta ſe ad ſuam antecedẽtem habet. Quæ proportionalitas euerſa ex proportionum ſimilitudine, & aptiſſime ex proportionalitate coniuncta inferri poteſt. Exemplum in numeris. ſicut 8 & 4 ſe habent ad 4: ſic 6 & 3 ad 3. Quo fiet vt ſicut 8 & 4 ſe habent ad 8, ſic 6 & 3 ad 6 ſe habeant.

AEQVA proportionalitas eſt, quãdo plures quãtitates in vnã

proportionem ex parte vna ſumuntur:atque aliæ totidem vel eiuſdem generis,vel alterius ex parte altera ſecũdum eandem proportionem applicantur: & mediorum æquali numero remoto,ſimilitudo proportionum in extremis infertur. Exemplum in numeris. ſicut 8 ad 4,& 4 ad 2 ſe habent:ſic 12 ad 6,& 6 ad 3. Quamobrẽ ſicut 8 ad 2 ſe habent, ſic 12 ad 3. Idem erit etiam ſi comparationis ordo conuerſus atque intermixtus fuerit. veluti ſi dicatur, ſicut 8 ad 4, ſic 12 ad 6:& ſicut 4 ad 2,ſic 6 ad 3. Quocirca ſicut 8 ad 2, ſic 12 ad 3. Proportionalitatum alia etiam diuiſio eſt, quæ ex medietatibus mox enarrandis apparebit.

DE MEDIETATIBVS.

MEDIETAS eſt connexio quædam extremorum per habitudinem vtriuſque ad medium. Sic enim à pleriſque veteribus appellatur, quæ alio nomine proportionalitas vocatur ab Euclide. Medietatum autem tria genera Pythagoras,Plato, Ariſtoteles,& plerique omnes veteres poſuerunt : alias enim medietates Arithmeticas eſſe voluerunt,alias Geometricas, alias harmonicas:de quibus ſingulatim ordine dicemus.

ARITHMETICA medietas eſt,quando maximi medij & minimi differentiæ ſunt æquales. id eſt, vbi proportionis æqualitate neglecta,æqualis inter terminos differentia cuſtoditur:ſiue in numerorũ ordine naturali, vtpote 1.2.3.4:ſiue æquales numeri cõtinue ſint omiſſi,ſicut 1.4.7.10. Si enim vnũ omittas,differentia erit 2:ſi 2, differentia erit 3: ſi 3,differentia erit 4,& ſic deinceps. Differẽtia verò appellatur exceſſus ille numeri,quo maior numerus minorem ſuperat.

Huius autem medietatis proprium illud eſt, Maximi ad mediũ non eſt eadem proportio quæ medij ad minimũ, ſed medij ad minimũ proportio ſemper maior eſt quàm maximi ad medium. Quo fit vt in minoribus numeris ꝓportio ſemper maior ſit, & in maioribus minor. Verbi gratia. inter 8 & 4 ſecundũ iſtã medietatẽ medius eſt ſenarius. differẽtiã vtrobiq; numerus binarius facit. At maior eſt proportio medij ad minimũ, videlicet 6 ad 4, quæ eſt ſeſquialtera, quàm maximi ad mediũ, videlicet 8 ad 6, quæ eſt ſeſquitertia.

Alia eius proprietas eſt, Si huiuſmodi proportiones in tribus terminis diſponantur, extrema ſimul addita tantum facient, quantũ medium duplicatum. ſicut 6.4.2:è quibus bis 4, faciũt 8. itémque 6 & 2, faciunt 8. Quòd ſi in quatuor terminis ponantur, tunc duo media per additionem coniuncta tantum efficient, quantum duo

extrema ſic iuncta. vt ſi ponantur 8.6.4.2. tantum enim creant 6 addita ad 4, quantum 8 ad 2 addita. Ex hac proprietate ſumi poteſt ratio generalis progreſſionis ſuprà in integris poſitæ.

Rurſus alia eius proprietas eſt, Si hac medietate conſtituta in tribus terminis prius multiplicentur extrema, deinde medium per ſe ipſum, id quod proueniet ex medij ductu in ſeipſum: tantum ſuperabit id quod ex multiplicatione extremorum prodibit, quãtum producetur ex alterius differẽtiæ in alteram ductu. Exemplum in his terminis 2.4.6. Sicut 2 ſe habẽt ad 4, ita 4 ad 6. bis 6 faciũt 12. quater 4 creant 16, quæ per 4 excedunt 12. Qui exceſſus etiam prouenit ex ductu differentiarũ in ſe. differẽtia enim vtraque eſt 2. bis autem 2 faciunt 4. Eodem modo ſi termini 4 ponantur, & multiplicatis extremis alterum mediũ in alterum ducatur, id quod proueniet ex alterius medij in alterũ ductu: tantum ſuperabit id quod ex multiplicatione extremorum prodibit, quãtum producetur ex multiplicatis differentijs duabus, quæ ſunt inter alterutrum illorum mediorum & extrema. Veluti ſi eſſent 2.4.6.8. bis 8 creant 16. quater 6 faciũt 24: quæ per 8 excedunt 16. Idem autem exceſſus ex multiplicatione differentiarũ, quæ ſunt inter alterutrũ illorũ mediorum & extrema, producetur. nam ſi de duobus medijs id quod prius eſt capias, videlicet 4: differẽtia inter prius extremũ & ipſum mediũ eſt 2: & differentia inter ipſum & poſterius extremũ eſt 4. itaque differentiæ ipſæ 2 & 4 in ſe ductæ, procreant 8. Similiter ſi de duobus medijs id quod poſterius eſt, ſumas, videlicet 6: differẽtia inter ipſum & primum extremũ eſt 4: & differẽtia inter ipſum & ſecundum extremũ eſt 2. quæ differentiæ in ſe ductæ creant 8.

GEOMETRICA medietas eſt, quando maximi ad mediũ eadem eſt proportio quæ medij ad minimũ. In qua medietate differentiarũ æqualitate neglecta, proportionũ æqualitas obſeruatur, ſicut cernere licet in his numeris 4.6.9. vbi medius numerus eſt 6. Secũdũ hãc medietatem multo aptius proportionalitas appellatur, quàm ſecũdum Arithmeticam. Etenim in illa proportionalitas ſecundum exceſſum intelligitur per æquales differẽtias: at non per ſimilitudinem proportionum, quemadmodum in hac euenit.

Huius medietatis propriũ eſt illud, In maioribus terminis & in minoribus proportio ſemper æqualis eſt. Veluti inter 30 & 10, eadem eſt proportio quæ inter 6 & 2.

Alia eius proprietas eſt, In proportionalitate continua differentiæ terminorum eadẽ inter ſe ſunt proportione, qua ſunt termini,

quorum ſunt differentiæ. Exemplum. ſicut 8 ad 4 dupla ſunt, ſic 4 ad 2. Similiter differentia inter 8 & 4, quæ eſt 4, dupla eſt ad differentiam inter 4 & 2, quæ eſt 2.

Rurſus alia prietas geometricæ medietatis in proportionalitate continua multipliciũ hæc eſt, In numeris duplis minor terminus per ſeipſum exceditur à maiori: veluti 1.2.4.8. In numeris triplis minor terminus ſuperatur per ſeipſum duplicatum: ſicut 1 3.9.27. in quadruplis per ſeipſum triplicatum: ſicuti 1.4.16.64. & ita deinceps minor terminus exceditur à maiore.

Alia præterea proprietas eſt, Si hæc medietas conſtituatur in tribus terminis, quicquid ex ductu alterius extremi in alterum producetur, æquale erit ei quod ex medij in ſeipſum ductu natũ erit. Veluti ſi ſumas 8.4.2. bis 8, ſunt 16: quater 4, tantundem. Similiter in quatuor terminis, quicquid ex alterius extremi in alterum multiplicatione natum erit, æquale erit ei quod ex alterius medij in alterum ductu producetur. ſicuti ſi capias 16.8.4.2. bis 16, creãt 32: quater 8, tantundem. Ex hac proprietate dependet celebris illa quatuor proportionalium regula, quæ de tribus notis quartum ignotũ proferentibus ſuprà data eſt: per quam in negotiationibus, innumera in lucem veniunt.

HARMONICA medietas eſt, vbi poſitis tribus terminis, ſicut maximus eorũ ſe habet ad minimũ, ita differẽtia inter maximũ & mediũ ſe habet ad differentiam inter medium & minimũ. Hæc autem medietas cum communiter & differẽtias & proportiones admittat, tamen neque æqualibus differentijs, neque æqualibus proportionibus conſtituitur. Veluti ſi inter 6 & 2 media ponantur 3: ibi tripla proportio eſt maximi ad minimum, videlicet 6 ad 2. Eadémque eſt proportio differẽtiæ maximi ad mediũ, quæ eſt 3 ad differentiã medij ad minimũ, quæ eſt vnitas. nam 3 ad 1 triplam itidẽ proportionem faciũt: quæ cum extremorum proportione conſentit. Ex hac medietate eliciuntur omnes muſicæ concentus.

Illud huius medietatis eſt proprium, In maioribus terminis maior ſemper eſt proportio: atque in minoribus minor. quod contra eſt in medietate Arithmetica. Verbi gratia. cape 6.3.2. de quibus 6 ad 3 comparata duplam proportionem habent: tria verò ad 2, ſeſquialteram, quæ minor eſt quàm dupla.

Alia huius proprietas, Quota parte minimi termini, minimus ipſe exceditur à medio: totidem partibus maximi, medius ſuperatur ab ipſo maximo. Verbi gratia, ſume 6.3.2. Duo exceduntur à 3 per

dimidium ipſius binarij quod eſt vnitas. Similiter 6 excedūt 3 per dimidium ipſius ſenarij,quod eſt 3. Rurſus huius proprium eſt,Si extremi termini proportionū ſimul iungantur,& totum illud additum multiplicetur per medium, id quod inde proueniet, in dupla proportione ſe habebit ad illud quod ex multiplicatione extremi per extremum producetur. Verbi gratia, ſume 6.3.2.adde 6 ad 2,fient 8: multiplicētur 8 per 3,quæ medium tenent,& ſurgent 24. Item ſi multiplices extremum per extremū, videlicet 6 per 2, prodibunt 12.quæ faciunt dimidium de 24.

Illud annotandum eſt , has tres medietates inter duos terminos inueniri poſſe.vtpote inter 10 & 40,quippe ſi in medio ſtatuas 25, Arithmetica medietas prodibit: ſi ponas 20, medietas Geometrica erit:ſi 16,harmonica medietas naſcetur.

Quomodo propoſitis duobus terminis medium proportionale ſit inueſtigandum.

PROPOSITIS duobus terminis medium Arithmeticum ſic exquires. De maiori numero ſubtrahe minorem,& reliqui dimidium adde minori: ita quod inde exibit, mediū proportionale erit. Exempli cauſa,inter 10 & 40 ſubductio deprehendit reliquum eſſe 30. horum dimidium 15 adde minori numero 10,& prodeunt 25.quod medium eſt quæſitum. Vel ſi libet facilius,Coniunge vtrunque extremum , & totius coniuncti dimidiū proportionale Arithmeticum erit.Nam ſi ſumas 10 & 40, adde ea ſimul,fiunt 50: ea ſi dimidies,habebis 25.id medium eſt Arithmeticum.

QVÒD SI inter eoſdem terminos 10 & 40 , medium proportionale Geometricum eruere voles:alterum in alterum multiplica, videlicet 10 in 40,& procreabis 400.cuius numeri producti radicē quadratam extrahere oportet,quæ medium proportionale Geometricum erit.radicem autem eam 20 inuenies.

AT SI medium proportionale harmonicum inuenire libet,primum iunge extrema ipſa,videlicet 10 & 40:ſic ſurgent 50.Deinde ſubtrahe minorem de maiore,& reliquum erit 30, differentia vtriuſque numeri.quam ſi in minus extremum,videlicet 10,ducas,naſcentur 300.Eum numerum productum diuide per ſummam vtriuſque extremi coniunctam,videlicet 50:& 6 exibūt. quæ adde minori termino 10: & prodeunt 16 . Hoc eſt proportionale medium harmonicum inter 10 & 40.

Quæ medietates quibus rerum publicarum ſtatibus cōparetur.

ARITHMETICA medietas reipublicæ adſimilatur, quæ à paucis regitur, quòd in minoribus eius terminis maior ſit proportio. Harmonica verò medietas optimatũ reipublicæ comparatur, quòd in maioribus eius terminis proportio ſit maior. At medietas Geometrica, quòd in maioribus terminis & in minoribus proportionẽ æqualem ſeruet, popularem quodāmodo rempublicam refert, in qua ciues omnes, & ſummates, & plebeij, ius æquale vendicant.

ordani arith.

PRAETER has tres medietates præcipuas à veteribus proditas, Iordanus octo alias, quas collaterales vocat, addidit: quas qui cognoſcere volet, ab ipſo petat licebit. Nos verò qui de proportionibus tantum ea quæ ad ſupputationem in vita neceſſariam perdiſcendam, ſpectant, deguſtare, non vniuerſas proportionum vel regulas, vel proprietates attingere decreuimus: cæteras medietates à poſteris ad varietatem proportionalitatum perſcrutandam, curioſius adiectas, tanquam ad inſtitutum noſtrũ non attinentes, omittendas cenſuimus.

Quomodo propoſitis duobus quibuſuis terminis, proportio inter eos inueniri poſſit.

PROPOSITIS duobus terminis quibuſcunque, neceſſe eſt alterum altero vel maiorem, vel æqualem, vel minorem eſſe. Itaque ſi æquales ſunt, æqualitatis eſt proportio: quæ neminem latere poteſt. Sin autẽ alter altero maior eſt, aut minor, quãuis inæqualitatis ſit proportio quæ cōplures ſpecies habet, facile tamen in quam ſpeciem habitudo ea cadat, cognoſces ad hũc modũ, Maior terminus per minorem continuo ſecãdus eſt. Eo fiet vt quod in numero partitionis exit, proportionẽ denominet, quæ inter vtrunque extremum habetur. Idque perpetuum eſt quando maior terminus in comparatione præcedẽs, maioris inæqualitatis proportionem facit. Veluti ſi inter 8 & 4 proportionem quæris: diuide 8 per 4, & in numero partitionis 2 exeunt, quæ denominãtia proportionem illam monſtrant eſſe duplam: quam in multiplicium ſpeciem cadere palàm eſt. Similiter ſi inter 3 & 2 proportionem quæris, 3 per 2 ſecta, in numero ſectionis $1\frac{1}{2}$ proferunt: qui numerus proportionem ſeſquialteram indicat, quæ in ſuperparticularium ſpeciem cadit. ita inuenies in reliquis. Cæterũ ſi minor terminus in comparatione præcedens, minoris inæqualitatis pro-

portionem facit:tunc præpoſitio hæc(ſub)denominationi propor tionis ex numero ſectionis eruendæ præponenda eſt. Veluti ſi inter 4 & 8 proportio quæratur: quia poſt ſectionem maioris factam per minorem 2 in numero partitionis inueniuntur : ſubdupla erit proportio, quæ in ſubmultipliciū ſpecie continetur. Si inter 2 & 3 proportionem quæris, quia minor numerus in cōparatione præcedit, & ſectio maioris per minorē facta in numero partitionis $1\frac{1}{2}$ inuenit: ſubſeſquialtera proportio erit. quam de ſubſuperparticularium ſpecie prodire manifeſtum eſt. At ſiquis ſcire cupit quemnam ſenſum afferat hæc præpoſitio(ſub)minoris inæqualitatis proportionibus præpoſita, illud obſeruare oportet, Quemadmodū per ſingulas maioris inæqualitatis ſpecies maior terminus minorē pluſquam ſemel cōtinet, ita per ſingulas minoris inæqualitatis ſpecies, quantum minor à maiore ſuperatur: tantum deeſt ad integrū maiorem componendū. Quare cum ea minoris ad maiorem cōparatio pariat minutias, ad vitandā earū denominationē, veteres præpoſitionē hanc(ſub) ad ſingulas maioris inæqualitatis ſpecies addiderunt: tantum deeſſe ſignificantes ad integrum componendū, quantum maior terminus ſuperaret minorem. Verùm ſi exquirere libet quas minutias hæ proportiones pariunt: continuo id cognoſces, ſi minorem terminum qui in proportione præcedit, in minutias frangas, ſecans per maiorem, eo modo quo in minutiarum libro admonuimus. ita ante oculos apparebunt minutiæ, in quauis minoris inæqualitatis ſpecie occurrētes. Exempli gratia. ſi proportionem inter 4 & 8 quæris, 4 per 8 diuide, & fient $\frac{4}{8}$. quæ minutiæ ſignificāt quatuor partes de 8 adhuc deeſſe ad integrū cōponēdū, proportionémque æqualitatis creādā. Quatuor verò octauæ ad minimam nomenclaturam redactæ faciunt $\frac{1}{2}$. Ita adhuc aliæ $\frac{4}{8}$, quæ ſunt $\frac{1}{2}$, deſunt, vt fiat vnum integrum. Quo fit manifeſtum $\frac{4}{8}$ facere dimidium illius proportionis quæ æquare deberet 8. Sicut è cōtrario, ſi 8 ad 4 cōparentur, dupla erit proportio, quòd 8 in ſe capiāt bis 4. Similiter ſi 3 ad 9 comparentur, 3 per 9 ſecta proferent $\frac{3}{9}$, quæ faciunt $\frac{1}{3}$. Et $\frac{6}{9}$ quæ creant $\frac{2}{3}$, deſunt: vt æqualitatis proportio ad 9 producatur. ita $\frac{3}{9}$ tertiam partem faciunt illius proportionis, quæ 9 æquare deberet. Itē ſi proportionē de 16 ad 5 voles ſcire, ſectio maioris per minorem facta deprehendit in numero partitionis $3\frac{1}{5}$. qui numerus cū minutijs triplam ſeſquiquintam indicat, quæ in multiplicis ſuperparticularis ſpeciem cadit. Contrà, ſi de 5 ad 16 proportionem quæris, 5 per 16 ſecta

creant $\frac{5}{16}$: quæ de 16 partibus ſolas quinque inueniri demonſtrāt. ita deſunt $\frac{11}{16}$, vt integrum producatur, & æqualitatis proportio fiat. Ad eundem modum inter quoſuis numeros proportionē nullo negotio inueſtigare licet. Hæc autem ex Euclidis verbis eruuntur: vbi in libro ſeptimo dicit, Denominatio proportionis minoris numeri ad maiorem dicitur pars, vel partes ipſius minoris quæ in maiore ſunt. Maioris autem ad minorem, totum, vel totum & pars, vel partes, prout maior ſuperfluit. Quibus verbis denominationem proportionis, quæ de minore numero ad maiorem habetur, dicit eſſe vel partem vnicam, veluti $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$. vel partes plures, ſicut $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{4}{5}$. quas inuenies eo modo quo dictum eſt. Cæterum denominationē proportionis maioris numeri ad minorem, admonet eſſe vel totum, ſicut in multiplici: vel totū & partē, ſicut in ſuperparticulari: vel totū & partes, ſicut in multiplici ſuperpartiēti.

Liquet itaque in minoris inæqualitatis ſpecie, vtrancunque viā ſequare, rē ad idem recidere: ſiue ad vitandas minutias hanc præpoſitionē (ſub) maioris inæqualitatis denominationibus præponas, ſiue minutias ipſas ſuis nominibus ſingulas exprimas.

Quomodo cognoſcatur vna proportio alia eſſe maior.

SIMILES dicuntur proportiones, quæ eandem denominationem recipiunt, quas etiam interdū vnius proportionis, nōnunquam eiuſdem Arithmetici vocant. Maior autē proportio eſt, quæ maiorē denominationē habet: Minor verò, quæ minorē. Denominatio autē omnis tam grandis eſſe dicitur, quàm numerus eſt qui eā deſignat. Vnde ſi de tripla & quadrupla quæratur vtra earū ſit maior: quia maior numerus eſt quaternarius denominās quadruplam, quàm ternarius triplam denotās: ideò quadrupla maior erit quàm tripla, & quintupla quàm quadrupla, ſextupla quàm quintupla, & ſic in infinitum. Cæterum ſeſquialtera maior eſt quàm ſeſquitertia, propterea quòd ſeſquialtera denominatur de $1\frac{1}{2}$, & ſeſquitertia de $1\frac{1}{3}$: & quanquam in vtraque numerus integer æqualis eſt, minutiæ tamē his adiūctæ, ſunt inæquales. Porrò minores in ſeſquitertia. nam in fragmētis (vti ſuperius libro ſecūdo admonuimus) quāto maior eſt denominator, tāto minus eſt fragmentum. Quocirca $\frac{1}{4}$ minor eſt quàm $\frac{1}{3}$: ſicut $\frac{1}{3}$ minor, quàm $\frac{1}{2}$. atque ideo ſeſquialtera maior eſt quàm ſeſquitertia: & ſeſquiquarta maior eſt ſeſquiquinta: ſeſquiſextáque maior ſeſquiſeptima: & ſic de cæteris in infinitum, vbi minutiæ in

denominatione occurrunt. Vnde apparet triplam ſeſquialterã, vtpote de 7 ad 2, maiorem eſſe quàm triplam ſeſquitertiam. Nihilominus tamen tripla ſeſquitertia maior eſt quàm dupla ſeſquitertia, vel dupla ſeſquialtera: quod euenit non ratione minutiarũ adiunctarum quæ maiores ſunt in ſeſquialtera, ſed ratione denominationis ex integris deſignatæ. tripla enim à 3 denominatur: dupla à 2. Sed quæcũque minutiæ per (ſeſqui) denotẽtur, nũquã vnũ integrũ æquare poſſũt. quare maior erit proportio triplæ ſeſquitertiæ, quàm duplæ ſeſquialteræ propter maiorẽ triplæ denominationẽ.

Quomodo proportionẽ ex pluribus cõpoſitam eſſe cognoſcas.

DE CONTINVE proportionalibus prius, deinde de improportionalibus dicere deſtinamus, quomodo in his proportionẽ ex pluribus eſſe cõpoſitam cognoſcas. Atque in continue quidem proportionalibus, de tribus quãtitatibus admonet nos Euclides ad hunc modũ, Si fuerint tres quantitates continue proportionales: proportio primæ ad tertiã dicetur proportio primæ ad ſecundam duplicata. Quibus verbis docet, ſi fuerit proportio primi ad ſecundum, ſicut ſecundi ad tertium, tunc proportio primi ad tertium erit, ſicut primi ad ſecundũ duplicata, id eſt, ex duabus talibus cõpoſita. quæ cõpoſitio cognoſcetur per multiplicationem denominationis ipſius proportionis in ſe. Verbi gratia, Sint tres numeri continue proportionales, dupli. veluti 2.4.8. in his proportio inter primũ & ſecũdum dupla eſt, ſi à maiore incipiat comparatio: alioqui ſi à minore, ſubdupla eſt. Denominatio autem duplæ venit à 2. Igitur ſi 2 in ſe ducantur, naſcentur 4, quæ inter primum numerum & tertium quadruplã eſſe proportionem denotabũt. ita demũ ſi à maiore incipiat cõparatio: alioqui ſi à minore, ſubquadrupla erit. Ipſa autẽ quadrupla eſt dupla duplæ, quia conſtat ex duabus duplis. Rurſus de 4. quantitatibus Euclides admonet, inquiẽs, Si fuerint quatuor quantitates continue proportionales: proportio primæ ad quartã dicetur proportio primæ ad ſecũdam triplicata. Quorum verborum ſenſus hic eſt, Si fuerint 4 quantitates continue proportionales: proportio primæ ad quartam erit, ſicut primæ ad ſecundam triplicata: hoc eſt prius in ſe, poſtea in productũ multiplicata. Verbi gratia. ſint quatuor numeri tripli cõtinue proportionales, veluti 1.3.9.27, proportio inter primum & ſecundum tripla eſt, ſi à maiore incipiat comparatio, quæ denominatur à 3. tria autem in ſe ducta producunt 9: ipſa autẽ 9

rurſus in 3 ducta procreant 27, quæ vigintiſeptuplam proportionē inter primũ & quartũ denotant, ſi maior in cõparatione præcedit. ea autem eſt tripla triplæ, quia conſtat ex tribus triplis. Perinde itaque eſt ac ſi diceretur, Proportio eſt duarum quantitatum ſimplex interuallum, & habet naturam ſimplicis dimēſionis, vt lineæ. Proportionalitas autem in tribus, eſt duplex interuallum, habens vnum medium: & refert naturam duplicis dimēſionis, vt ſuperficiei. Proportionalitas autem in quatuor, eſt triplex interuallum, habens duo media: & refert naturam triplicis dimenſionis, vt ſolidi. Similiter ſi quinque termini continue proportionales fuerint, proportio extremorum complectetur proportionem primorum quater: ſi ſex fuerint, quinquies eam capiet: ſi ſeptem, ſexies: & ita deinceps, vt ſemper proportio extremorum toties contineat proportionem primorum, quot ſunt omnes termini dempto vno. Nam cũ proportiones ſint interualla quædam, interuallum autem niſi inter duo extrema eſſe nequeat: neceſſe eſt terminos ipſos interualla concludentes, vno plures eſſe quàm ſint ipſa interualla. Igitur ſi quatuor termini fuerint, ſicut 1.2.4.8. proportio extremorũ, videlicet 8 ad 1 erit octupla. & quia proportio primorum eſt dupla, & tria ſunt interualla, octupla illa cõſtabit ex tribus duplis. Si quinque termini fuerint, veluti 1.2.4.8.16. proportio extremorũ, videlicet 16 ad 1 erit ſedecupla: quæ quia primorũ proportio eſt dupla, & 4 ſunt interualla, conſtabit ex quatuor duplis. qua ratione proportio de 32 ad 1 compoſita erit ex quinque duplis. & ſic in infinitum. Quo fit manifeſtum, in proportionalitate continua proportionē extremorũ produci ex omnibus proportionibus medijs. Vel ſi alia via ſcire voles, pluribus cõtinue proportionalibus propoſitis, quæ proportio ſit inter extrema, proportionē inter prima duo obſeruabis: ſicut in exemplo proxime dato, vbi dupla erat inter 2 & 1. In qua denominator eius in ſe ducatur, & ſurgent 4. quæ inter extremos trium terminorum, ſicuti 1.2.4, quadruplã proportionem deſignant. Deinde ſi denominator ille productus, videlicet 4, iterum ducatur in denominatorem primæ proportionis, videlicet 2: naſcetur proportio inter extremos quatuor terminorum, vtputa 1.2.4.8. quæ eſt octupla. bis enim 4 ſunt 8. Rurſus ſi octo in denominatorē primæ proportionis 2 ducantur, fient 16. quæ inter extremos quinque terminorũ, veluti 1.2.4.8.16. ſedecuplam monſtrant proportionem. Denuo ſi 16 in primæ proportionis denominatorem, videlicet 2, ducantur: prodibunt 32. quæ pro-

portionem inter extremos ſex terminorum, vtpote 1.2.4.8.16.32. denominabunt. & ſic in infinitũ poſtremæ proportionis denominatorem productũ per denominatorẽ primæ multiplicando procedere licet. Ita in longa ſerie continue proportionalium, omnes multiplicationes pauciores per numerũ binarium euenient, quàm ſunt ipſi termini propoſiti, ſicut ex prædictis apparet.

Quomodo in terminis improportionalibus lõga ſerie cõtinuatis vnam proportionem ex pluribus compoſitam eſſe cognoſcas.

HIC PVTAMVS operæpretiũ pauca quædã obiter præfari, qui termini ſunt improportionales. Sunt autem illi improportionales, inter quos proportionum diſſimilitudo cadit. nam ſicut proportionum ſimilitudo proportionalitas, ſic diſſimilitudo improportionalitas vocatur. quæ etiam ipſa, & continua, & ſeparata eſſe poteſt. Improportionalitas autem continua eſt, aut quia maior eſt proportio primi ad ſecundum quàm ſecundi ad tertium, & ſic deinceps: aut quia minor velut inter 1.2.6.24, vbi tres ſunt proportiones diſſimiles, quarum prima dupla eſt, inter 2 & 1, ſecũda tripla inter 6 & 2, quæ maior eſt, quàm dupla: tertia quadrupla eſt inter 24 & 6, quæ maior eſt quàm tripla. Improportionalitas verò ſeparata ſiue incontinua eſt aut quia maior eſt proportio primi ad ſecundum, quàm tertij ad quartum, vtpote inter 10 & 2 ac 6 & 4: aut quia minor. Huius autem inter proportiones diſſimilitudinis, ſiue continua ſit, ſiue ſeparata, duæ ſpecies habentur. Altera eſt, quando maior eſt proportio primi ad ſecundũ, quàm ſecundi ad tertium in continuis: vel quàm tertij ad quartũ in ſeparatis. quæ, maior improportionalitas nuncupatur, vtputa inter 8 & 2, ac 6 & 3. Altera eſt, quando minor eſt proportio primi ad ſecundum, quàm ſecundi ad tertium in continuis, vel quàm tertij ad quartum in ſeparatis. ſicuti inter 6 & 3 ac 8 & 2, quæ, minor improportionalitas appellatur. Ad hunc modum plerique omnes improportionalitatem & diffiniunt, & diuidunt.

CAETERVM quomodocunque termini complures ſiue proportionales ſiue improportionales lõga ſerie ſint cõtinuati, & quãtacũque inter improportionales diſſimilitudo interueniat, proportionẽ ſemper inter primũ & vltimũ ex omnibus eſſe collectã, Euclides nos admonet, inquiens, Cum continuatæ fuerint plures proportiones, ſiue eædem, ſiue diuerſæ: proportio primi ad vltimum

dicetur ex omnibus compoſita. Quocirca ſi plures proportiones, ſiue ſimiles, ſiue diſſimiles inter primum terminum & vltimũ me diæ interueniunt, proportio inter ipſos extremos terminos medias illas proportiones omnes, quotquot fuerint, complectetur. Denominationem autem habebit à numero producto ex multiplicatione denominationum omnium proportionum mediarum, nempe primarum duarum alterius in alteram, deinde producti cuiuſque numeri continuo in quanque proximam, donec per omnes ſit diſcurſum. Nam proportio cõponi ex duabus proportionibus dicitur, quando denominatio illius producitur ex ductu denominationum illarum proportionũ alterius in alteram. Similiter ex pluribus proportionibus componi dicetur, quando denominatio illius producitur ex duarum primarũ denominationum alterius in alteram, deinde producti in quinque proximam ductu vſque ad finem. Nec refert ab vtra manu denominationes ipſas multiplicare incipias, ſiue à dextra, ſiue à ſiniſtra, dummodo cœptũ ſequens ordinem, per omnes diſcurras. Idque tam in proportionalitate continua, quàm in omni improportionalitate perpetuum eſt.

DE PROPORTIONALITATE autem continua, quãquam ex prædictis licet id videre, vnum tamen exemplum dare non grauabimur. Eſto, proponantur hi quinque numeri dupli 1.2.4.8. 16. à dextra incipientes inter duos primos 16 & 8 duplam proportionem inuenimus. iterum progredientes inter 8 & 4, aliam duplam deprehendimus. Duæ igitur illæ denominationes altera in alterã ductæ quadruplam oſtendent proportionem inter 16 & 4. Rurſus procedentes inter 4 & 2 aliam duplam cernimus: quam in denominationem prius ex alijs productam videlicet quadruplam ducẽtes, octuplã formabimus. ſic inter 16 & 2 octuplã cõperimus. Denuo progredientes inter 2 & 1, duplam etiamnum habemus. eã autem in octuplam priores complectentem ducentes, ſedecuplam tã dem producimus. quæ proportio inter 16 & 1 inuenitur medias omnes complectens. Itidem in omni alia proportionalitate cõtinua eueniet, quotcunque proportiones in ea connectantur.

NVNC exẽpla de improportionalitate demus, quãdo proportiones diſſimiles inter primum & poſtremum interueniunt. Et exempli cauſa ſumamus hos quatuor numeros 1.2.6.24. Inter quatuor hos numeros tres ſunt proportiones. quarum prima inter 2 & 1 eſt dupla: ſecunda, inter 6 & 2 eſt tripla: tertia, inter 24 & 6 eſt quadrupla. Igitur ſi ſcire voles quæ proportio ſit inter extrema, vide-

licet 24 & 1,inueſtiga primum proportionem inter duo prima,videlicet 2 & 1,& duplam habebis: iterum inueſtiga inter 6 & 2, & tripla tibi occurret: quæ denominationes altera in alteram ductæ procreant ſextuplam:ea erit proportio inter 6 & 1. Deinde ſi progrediens quæris proportionem inter 24 & 6,quadruplã inuenies: ea autem ſi in denominationem ex prioribus collectam videlicet ſextuplam ducatur,viginti quadrupla naſcetur: quam proportionem ex dupla tripla & quadrupla compoſitam videre licet. In hoc exẽplo minor improportionalitas continua eſt,ſi à ſiniſtra in dextram tendas,& à maioribus terminis ad minores comparationem in ſingulis proportionibus facias,vti nos iam fecimus.

SIMILIS cõpoſitio proportionis inter extrema erit, etiam ſi proportiones omnes ex integris & minutijs,vel minutijs ſolis ſint denominatæ. Quod vt magis appareat, exempli gratia ſumamus hos quatuor numeros 4.6.8.10.inter quos,tres proportiones diſſimiles habentur:videlicet inter 6 & 4 ſeſquialtera, inter 8 & 6 ſeſquitertia,inter 10 & 8 ſeſquiquarta.quarũ proportionum denominatores capiamꝰ,videlicet pro ſeſquialtera $1\frac{1}{2}$:pro ſeſquitertia $1\frac{1}{3}$: pro ſeſquiquarta $1\frac{1}{4}$: ipſorũmque priores duos alterum in alterũ ducamus,eo modo quo in minutiarũ libro edocuimus:ita producetur denominator proportionis ex ambabus compoſitæ. Deinde productum ex illa multiplicatione denominatorem iterũ in tertiæ proportionis denominatorẽ ducentes,procreabimus denominatorem illius proportionis,quæ ex tribus illis cõponitur. Igitur ſi à prioribus duobus incipientes $1\frac{1}{2}$ in $1\frac{1}{3}$ ducamus,enaſcentur 2, quæ de ſeſquialtera & ſeſquitertia duplam proportionẽ componi demonſtrant. Deinde 2 in $1\frac{1}{4}$ ducamus,& producẽtur $2\frac{1}{2}$: qui numerus proportionẽ de tribus illis varijs cõpoſitam duplã ſeſquialteram denominabit: quæ proportio erit inter extremos omniũ illarũ proportionũ terminos,videlicet 10 & 4. In hoc exẽplo maior improportionalitas cõtinua eſt,ſi à ſiniſtra incipias,& maiores terminos ad minores cõparans in dextrã tendas,vti nos iã fecimus.

IAM verò exemplũ demus,quando improportionalitas ſeparata ſiue incontinua occurrit:nam Euclidis regula,quæ inſtar oraculi,neminẽ fallit,de ea etiam idem præcipit. Itaque cõferamus hos quatuor terminos 8 ad 2 pro priore proportione,& 6 ad 3 pro poſteriore:inter priores duos,eſt quadrupla, quæ maior eſt quàm ea quæ inter poſteriores dupla eſt: atque eapropter maior improportionalitas in his reperitur:& tamen proportio inter primum ter-

minum prioris proportionis & vltimum poſterioris ex omnibus proportionibus medijs cōpoſita comperietur, atque etiam ex illa quæ duas vtrinque poſitas media diſiungit:ea eſt inter 2,quæ ſunt in fine prioris proportionis, & 6 quæ ſunt in initio poſterioris. Id autem per regulam modo datam fiet manifeſtum. Nam ſiquis à ſiniſtra ab octo faciens initium in dextram tendat, inter 8 & 2, quæ prima occurrunt, quadruplam habebit. Deinde progrediens inter 2 & 6, quia minor terminus in comparatione præcedit, ſubtriplam comperiet,quæ minoris inæqualitatis eſt proportio:atque ideò ſicut ſuperius mōſtrauimus, per minutias ſuas denominãda, videlicet $\frac{2}{6}$,quæ ſunt $\frac{1}{3}$: ita ſi $\frac{1}{3}$ quæ hanc proportionē denominat,ducatur in 4 quæ denominãt priorem,naſcentur $\frac{4}{3}$: quæ vnū integrum & vnam tertiam facientes,ſeſquitertiam proportionem inter 8 & 6 ex duabus prioribus cōponi demōſtrant. Rurſus progredienti inter 6 & 3 proportio dupla occurrit : quæ quia à 2 denominatur,2 in productum ex priore multiplicatione denominationem,videlicet 1 $\frac{1}{3}$ ducantur:& in numero producto $\frac{8}{3}$ comperientur:quæ ſi ad integra reducas,inuenientur 2 $\frac{2}{3}$: quæ duplã ſuperbitertiam proportionem inter 8 & 3 manifeſtant:quã ex tribus illis medijs cōpoſitam eſſe,per regulam Euclidis explicauimus. Id quod paulo apertius de induſtria fecimus, vt nihil intereſſe mōſtraremus,qui termini medij inter extremos interueniant,etiam ſi maiore extremo ſint maiores,aut minores minore. Quanquã ſunt qui putant,ſi id fiat,maiores in medio proportiones nōnunquam occurſuras,quàm quæ eſt inter primum & vltimum, & fieri poſſe negant,vt pars ſuo toto ſit maior. Veruntamen id nihil obſtabit quo minus proportio inter primū & vltimū ex omnibus medijs colligatur. Nam nūquam accidet vt maior in medio proportio,quàm quæ inter primū & vltimum eſt,intercedat, quin ſimul alia minoris inæqualitatis proportio media etiam reperiatur,quæ cum maiore copulata tantum auferet,quantū illa nimium redundat, vt procreatio proportionis inter primum & vltimum ex medijs omnibus ad æqualitatē perducatur. Et ſi pergis quærere quomodo fieri poſſit vt proportioni adiuncta proportio quicquam ab ea detrahat, facile eſt explicatu, ſiquis proportionum naturã perнouit. Omnis nanque proportio maioris inæqualitatis alteri maioris inæqualitatis addita,proportionem creat alterutra maiorem. At omnis proportio minoris inæqualitatis alteri minoris inæqualitatis adiuncta,minorē,quàm alterutra ſit,profert. Cæterū quan-

do altera maioris inæqualitatis proportio , & altera inæqualitatis minoris copulantur , proportio quæ procreatur, minor eſt quàm quæ maioris eſt inæqualitatis,& maior quàm quæ minoris. Quo fit vt nõ omnis proportionũ collectio ſemper augeat. Itaque quãdo proportionẽ,quæ eſt inter primum & vltimum, ex medijs cõſtare Mathematici tradunt,hoc exprimũt ex omnibus medijs proportionibus eam colligi:quãuis non tota vnaquæque media ſemper ſit pars illius , quod interdũ illa proportionum copulatio detrahat:quod cũ acciderit,quicquid de ſingulis non detractũ reſtabit, partis vicem præſtabit in ea proportione quæ eſt inter primũ & vltimum. Rem illuſtremus exemplo:in quo & maiore extremo termino maiorẽ,& minore minorem interponamus:capiamúſque hos quatuor terminos 2.1.20.16. inter quos,ſi 2 ad 1,& 20 ad 16 cõparemus,maior improportionalitas ſeparata habebitur. Nihil refert ab vtra manu multiplicatio initium ſumat,dũmodo cœptum ordinẽ progrediẽdo ſeruet. Igitur à ſiniſtra,ſi libet,ordiamur:vbi inter 2 & 1 dupla proportio inuenitur: at inter 1 & 20 ſubuigintupla,quæ proportio progredienti proxima occurrit,& his minutijs exprimitur $\frac{1}{20}$. Ideo numeros has duas proportiones denominantes,alterum in alterũ ducamus, videlicet 2 in $\frac{1}{20}$: & producentur $\frac{2}{20}$. quæ faciunt $\frac{1}{10}$,& ſubdecuplam proportionem inter 2 & 20 ex prioribus illis duabus cõpoſitã indicãt. Rurſus inter 20 & 16 ſeſquiquarta occurrit:quocirca numerũ eum denominantem videlicet $1\frac{1}{4}$ ducamus in denominationẽ illam ex prioribus productã, videlicet $\frac{1}{10}$:& producentur $\frac{5}{40}$,quæ faciunt $\frac{1}{8}$:& ſuboctuplã proportionem,inter 2 & 16 ex omnibus medijs proportionibus compoſitam eſſe manifeſtãt. Vides igitur nihil referre qui termini inter primũ & vltimum medij interueniant, dummodo multiplicatio ab altero extremo ad alterũ progrediens, cœptúmque ſeruans ordinẽ,nihil erret;neque minoris inæqualitatis proportio pro maioris ſumatur:id quod multos ſæpe fallit. Regula nãque ab Euclide data generalis eſt, ſiue proportiones eædẽ,ſiue diuerſæ fuerint: id eſt ſiue ꝓportionales,ſiue improportionales termini occurrãt.

QVAMOBREM quod de improportionalitate ſeparata dicimꝰ, proportionem inter primum & vltimũ ex medijs omnibus cõſtare,multo magis in ſeparata proportionalitate verũ erit,in qua proportiones inter primũ & vltimum partim ſimiles,partim ſunt diſſimiles. Veluti ſi cõpares 4 ad 2 & 6 ad 3,in his terminis tres proportiones habentur: quarum duas ſimiles tertia media diſſimilis

diſiungit. Hic 4 ad 2 collata duplam creant: ea prima eſt proportio: iterum 2 ad 6 collata, ſubtriplam proportionem mediam, quæ duas ſimiles vtrinque diſiungit, monſtrant. Quocirca 2 in $\frac{1}{3}$, ducta proferent $\frac{2}{3}$: quæ ſubſeſquialteram proportionem inter 4 & 6 oſtendūt. Rurſus inter 6 & 3 dupla inuenitur, primæ ſimilis, quæ in productam ſubſeſquialteram ducenda eſt, nempe 2 in $\frac{2}{3}$: & producentur $\frac{4}{3}$: quæ ſeſquitertiam proportionem inter primum extremum terminum primæ proportionis & vltimum ſecūdæ patefaciunt: quam ex duabus ſimilibus proportionibus extremis, tertiáque media diſſimili compoſitam eſſe liquet. Ad eundem modū fiat, quotcunque & quæcūque proportiones, ſiue ſimiles & eædē, ſiue diſſimiles & quantuncunque variæ inter primum terminum & poſtremum mediæ interueniant.

QVAERET fortaſſe quiſpiam, quorſum de proportionum cōpoſitione prius monſtratum eſt in cōtinue proportionalibus: deinde in improportionalibus tam continue quàm ſeparatim: & demum in ſeparatis proportionalibus, quādo vna præceptio pro omnibus ſufficere potuiſſet. In prōptu ratio eſt, Euclidem ſecuti ſumus, qui de proportionum cōpoſitione in quantitatibus cōtinue proportionalib9 prius docere, atque ita per faciliora diſcentiū animos ad magis ardua præparare voluit, quàm regulā hanc enarratā tam multos receſſus tâmque varios anfractus habentē explicaret.

Quando proportio quæuis occurrit, quomodo proportiones alias ipſam componentes inueſtigabis.

QVI propoſita proportione qualibet, putat ſe poſſe dicere quot & quales aliæ proportiones eam componunt, in chaos maximum incidit imprudens. Sexcentæ nanque, imò verò infinitæ proportiones exquiri poſſunt, ex quibus quæuis conflari poteſt: id quod mox apparebit. Quamobrem quot proportionēs quanque formare queant, enarrare nemo poteſt, quippe cum ſint innumeræ. Cæterum cōplures inueniri poſſunt, ex quibus quæuis proportio cōſtet. Nam propoſita proportione qualibet, ea neceſſe eſt duos terminos habeat, inter quos, ſi niſi vnum medium appones, hi tres termini duas proportiones capient, ex quibus ea quæ inter extremos eſt, omnino componetur. Porrò cum multis modis terminus medius variari poſſit, multæ & variæ proportiones per id enaſci poterūt. Id quod hoc exēplo fiet manifeſtum. Inter 16 & 1, ſedecupla proportio eſt: inter quæ ſi medium terminū 6 interponamus,

per hoc inter 16 & 6 proportio dupla ſuperbitertia habetur:at inter 6 & 1,ſextupla eſt proportio. Vnde liquet proportionem ſedecuplam,quæ eſt inter extrema, ex his duabus medijs conſtare. Id ita habere probabis,ſi duas illas medias denominationes alteram in alteram ducas. nam 6 quæ ſextuplã denominant, ducta in $2\frac{2}{3}$, quæ denominant alterã, 16 producunt:quæ ſedecuplã proportionem inter extrema demonſtrant.Quo fit manifeſtum,duplam ſuperbitertiã & ſextuplam cõponere ſedecuplam . Quòd ſi inter eadem extrema alium terminũ medium ponas,aliæ proportiones orietur: vtpote ſi 8 interſeras. Eo fiet vt inter 16 & 8 dupla oriatur: at inter 8 & 1,octupla habebitur:quæ denominationes,altera in alteram ductæ,ſedecuplam iterum creabunt. qua ratione ſedecupla ex dupla & octupla cõflata erit. At ſi inter ipſa extrema plures termini ſint interpoſiti,plures ita proportiones enaſcẽtur: quas vniuerſas ea,quæ inter primum & vltimum eſt,complectetur. Veluti ſi 5.6.8. ſtatuamus inter 1 & 16, vt hic ſit ordo 1. 5. 6.8. 16.inter quinque hos terminos,quatuor diuerſæ proportiones habentur: inter 5 & 1 quintupla,inter 6 & 5 ſeſquiquinta.Igitur 5 quæ quintuplam denominant,ducta in $1\frac{1}{5}$,quæ denominant ſeſquiquintã, procreant $\frac{30}{5}$:quæ 6 integra faciunt,& ſextuplã proportionem inter 6 & 1 ex ambabus compoſitam indicant . Deinde progrediens inter 8 & 6,ſeſquitertiam comperies . Ita $1\frac{1}{3}$ multiplices in 6, quæ ex prioribus productam proportionem denominant,produces $\frac{24}{3}$: quæ ad integra reductæ faciunt 8,& octuplã inter 8 & 1 deſignãt. Rurſus progredere, & inter 16 & 8 dupla tibi occurret: igitur 2 ſi in 8 quæ ex priorum denominationum multiplicatione proxima producta ſunt, ducas,tandem produces 16, quæ ſedecuplam proportionem inter 16 & 1 denominant.Quo fit manifeſtum,ſedecuplam proportionẽ ex quintupla,ſeſquiquinta, ſeſquitertia,& dupla compoſitam eſſe. Igitur cum terminos inter extrema interponendos innumeris modis per minutias,in quas ſinguli frangi poſſunt,variare licet,manifeſto liquet,proportione propoſita nequaquam explicari poſſe quot & quæ proportiones eam poſſint componere, cum infinita varietas vnam atque eandem proportionem producat:id quod per exempla iam data videre licet:nam vt multæ proportiones,ex quibus quæuis conſtat, facile inuenientur,ita omnes exquirere quæ eam formare poſſint,infiniti operis erit.

Quomodo cuiuſque proportionis vel ambo extrema, vel alterum per numerũ ipſam denominantem inueniri poſſint.

OMNIS proportio duo extrema habet: quorum ſi id quod maius eſt, atque vnà ipſam proportionis denominationẽ cognoſcim⁹, diuiſio ipſius noti extremi per numerũ eam proportionẽ denominãtem facta, ignoratũ extremũ minus in numero partitionis patefaciet. Exempli gratia. Eſto, proportio dupla proponatur, cuius maius extremũ nobis notũ ſit 10: ſi minus eius extremũ eruere volumus, 10 per 2, quæ duplã denominant, ſecantes, in numero partitionis 5 inueniemus: ſic extremũ minus in lucẽ prodibit. At ſi proportionis denominatione cognita, minus extremum nobis erit notum, & maius ignoratum exquirere velimus, ipſum minus extremum in proportionis denominationem ducamus, & numerus productus maius extremũ erit. Veluti ſi de proportione tripla minus extremũ ſciamus eſſe 6: tria, quæ triplã denominant, in 6 ducamus, & naſcetur extremũ maius, videlicet 18. Cæterum ſi denominatione proportionis cognita, neutrum eius extremum habeamus notum, numeros quoſcunque, qui eam proportionem forment, pro arbitrio apponere poterimus.

HACTENVS de proportionum origine, generibúſque earum, & compoſitione. Nunc reſtat vt de earum Additione, Subductione, Multiplicatione, & Diuiſione dicamus. Id quod huius libri initio ſtudioſis polliciti ſumus.

DE PROPORTIONVM ADDITIONE.

ADDITIO proportionũ, ſiue cõtinuæ ſunt, ſiue ſeparatæ, ſiue ſimiles, ſiue diuerſæ, fieri debet ad eũ modũ quẽ paulo ſuperius explicauim⁹, vt in longa proportionũ ſerie, primarũ duarum denominatio ducatur altera in alterã. Deinde proportionis per hoc productæ denominatio in proximã denominationẽ ducatur: atque ita deinceps productæ cuiuſq; denominationis multiplicatio in quãque proximã, vſque in finẽ peragatur: quò cum ventum erit, poſtremo producta denominatio, velut ſumma quædã, proportionẽ monſtrabit omnes cõplectentẽ. Et quanquã exempla de proportionũ compoſitione iam antè data poſſunt ſufficere, vnũ tamen apponemus, in quo proportiones partim continuas, partim ſeparatas, partim ſimiles, partim diuerſas, connectemus. Eſto, ſeptẽ hi numeri proponãtur, 30.24.12.6.4.2.1. inter hos ſeptem numeros interualla ſex ſunt, & totidẽ proportiones. Qua-

re à ſiniſtra incipientes,ſingulóſque numeros maiores ad minores comparantes, inueniemus primã proportionem ſeſquiquartã, ſecundam & tertiã duplas,quartam ſeſquialteram,iterũ quintam & ſextam duplas.Omnes has denominationes ſic addemus.Primam denominationẽ ſeſquiquartã inter 30 & 24 in ſecundã duplam inter 24 & 12 ducentes,procreabimus duplã ſeſquialterã, quæ eſt inter 30 & 12. Deinde productã illam duplam ſeſquialterã in proximam duplam inter 12 & 6 ducentes,formabimus quintuplã inter 30 & 6.Rurſus quintupla illa producta in proximã ſeſquialteram inter 6 & 4 multiplicata,producet ſeptuplam ſeſquialterã inter 30 & 4.Denuo ſeptupla ſeſquialtera illa producta, ſi in duplã proximam inter 4 & 2 ducatur, enaſcetur quindecupla inter 30 & 2.Demũ quindecuplam illam in poſtremam duplã multiplicãtes, producemus trigintuplam inter 30 & 1: quæ proportio inter primum & vltimũ ſic formata,velut ſumma quædam, proportiones medias omnes intra ſe cõplectetur.Hoc modo proportiones,quæ ſunt numerorũ inter ſe habitudines, per additionem in vnã ſummam aptiſſime colliguntur. Nonnullis autem alia via proportiones ſic addere placet,vt earum omnium,quas ſunt addituri,terminos priores à ſiniſtra notent alium ſub alio,atque à dextra poſteriores earũ terminos prioribus è regione opponãt.Poſtea priorem terminum primæ proportionis in priorem ſecundæ multiplicant: numerúmque productum ſtatuunt priorem terminum proportionis ex ambabus cõpoſitæ.Deinde poſteriorem terminũ primæ proportionis in poſteriorem ſecundæ ducunt:& productũ ſimiliter faciunt poſteriorem terminũ compoſitæ.Porrò ſi proportiones plures addendæ fuerint, tertiæ proportionis priorem terminum in priorem terminum ex primis duabus compoſitæ ducunt, & productum ſtatuunt terminum priorem ex tribus illis compoſitæ: poſteriorémque terminum tertiæ, in poſteriorem ex duabus primis compoſitæ ducentes, productum terminum apponunt poſteriorem ex tribus illis compoſitæ.Et ſic vlterius,priorem terminum cuiuſque proportionis cõpoſitæ in terminũ priorem proximæ cuiuſque proportionis addẽdæ,& poſteriorem cuiuſque cõpoſitæ in poſteriorẽ cuiuſque addendæ,ducunt vſque in finem.Quo fit vt inter terminos poſtremo productos,proportio enaſcatur omnes priores cõplectens.Exemplum afferamus.Sint hæ tres proportiones addendæ,prima ſeſquitertia inter 4 & 3, ſecũda ſeſquialtera inter 3 & 2, tertia dupla inter 2 & 1. Si primæ proportionis

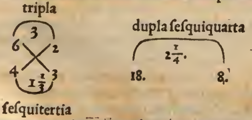
priorem terminum 4 duces in 3 priorē ſecundæ,creabis 12:qui terminus erit prior proportionis compoſitæ.Et ſi 3 poſteriorem terminum primæ duces in 2 poſteriorem ſeundæ,produces 6:qui terminus poſterior compoſitæ proportionis erit.Ita producti illi termini 12 & 6 duplam proportionem habentes indicāt ex ſeſquitertia & ſeſquialtera ſimul additis,fieri duplam.Id quod etiam denominationes ipſæ altera in alterā ductæ probant.Iam verò ſi priorem terminum proportionis cōpoſitæ , videlicet 12,in tertiæ proportionis priorem terminum 2 multiplices,prodibunt 24:qui terminus erit prior proportionis ex tribus cōpoſitæ.Et ſi 6 poſteriorem terminū compoſitæ in poſteriorem tertiæ 1 duces,nihil niſi ea ipſa 6 habebis: qui terminus erit poſterior proportionis ex tribus collectæ.Ita proportio inter productos terminos 24 & 6,mōſtrat ex ſeſquitertia,ſeſquialtera, & dupla ſimul additis, naſci quadruplam.Nam(vt inquit Euclides) omnium duorū numerorum compoſitorum proportio vnius ad alterum,eſt ex laterum ſuorū producta proportionibus.Latera autem numerorū appellantur,quorum multiplicatione numeri producuntur.Id quoque verū eſſe, proportionum denominationes, alia in aliam,ſicuti præcepimus, ductæ manifeſto probant. Hic proportionum addēdi modus per earum terminos multiplicatos, vti diximus, productorum terminorum mutuas habitudines obiter commonſtrat. Cæterum modus ille ſuperior denominationes proportionum,alias in alias ducendi,multo apertius indicat collectam earum ſummam.

DE PROPORTIONVM SVBDVCTIONE.

SVBDVCTIO proportionū monſtrat,quādo aliæ proportiones ab alijs ſubtrahūtur,quæ proportiones reſtabūt.Ea autē tum demū fieri poteſt,ſi minores ſunt quæ ſubducūtur,quàm à quibus fit ſubductio,vel ſi ſunt eis æquales. Neque enim per rerū naturā,quod maius eſt,ex minore demi poteſt. Quāobrē plurimū iuuabit meminiſſe,proportiones eas alijs maiores eſſe,quæ maiores alijs denominationes habēt: minores autē,quæ minores:id quod ſuperius admonuimus. Porrò modus ſubducendi proportiones longe facillimus hic eſt.Denominatio proportionū earū quæ ſubducēdæ ſunt,& earū à quibus fiet ſubductio,per numeros ipſas deſignātes,ſeorſum annotētur. Deinde numerus denominans proportionē à qua fit ſubductio, diuidatur per numerum qui denominat proportionem ſubducendam:& numerus ſe-

ctionis proportionem ex ea ſubductione relictã deſignabit. Et vt exempla rem magis aperiãt: Eſto, proportio ſeſquialtera ſubduci à dupla debeat, 2 quæ duplã denominant diuiſa per $1\frac{1}{2}$ qui ſeſquialteræ dant nomẽ, in numero ſectionis proferunt $\frac{4}{3}$: quæ ad integra reductæ faciũt $1\frac{1}{3}$: atque ita mõſtrant ſeſquitertiã ex ea ſubductione relictam. Certũ ſpecimen eſt rectè ſubductũ eſſe, ſi proportio relicta ad ſubductam addita proportionẽ inſtaurat à qua ſubducta fuit: ſicut fit in numeris. Seſquitertia nãque ad ſeſquialteram addita peralterius in alteram ductũ, duplam iterũ in numero ſectionis format. Aliud exemplum demus: ſeſquiquartámque ſubducamus à dupla ſeſquialtera: $2\frac{1}{2}$ quæ denominant duplã ſeſquialteram, ſecta per $1\frac{1}{4}$, quæ deſignant ſeſquiquartã, in numero ſectionis mõſtrant $\frac{20}{10}$. quæ ſunt duo integra, & duplam proportionem ex ea ſubductione ſupereſſe monſtrãt. Rurſus ſi libet cape ſpecimen, relictámque duplã ad ſeſquiquartã adde, ducens alterã in alterã, & in numero ſectionis dupla ſeſquialtera iterũ redibit.

ALIVS etiam modus proportiones per earum terminos ſubducendi, traditur à quibuſdã. Porrò proportionẽ vtranque, & quæ ſubduci, & à qua ſubductio fieri debet, minimis notant numeris qui eas proportiones habeant, quo facilius reddatur opus: proportionem autẽ à qua fit ſubtractio, ſuprà ſcribunt: quæ verò ſubducenda eſt, infrà, vt termini terminis reſpondeant, priori prior, poſteriórque poſteriori. Deinde priorem terminũ proportionis eius à qua fit ſubductio, in poſteriorẽ auferendæ, poſteriorémque eius terminũ in auferẽdæ priorem, oblique in formã crucis ducunt, & terminos ex his duabus multiplicationibus productos ſtatuũt eſſe relictæ proportionis terminos. Exẽpli gratia. à proportione tripla inter 6 & 2 ſubducatur ſeſquitertia inter 4 & 3. In hac ſubductione 6 in 3 ducta creant 18. & 2 ducta in 4 proferũt 8: inter quos terminos productos, videlicet 18 & 8 proportio dupla ſeſquiquarta reperit, quæ ex ſeſquitertiæ ſubductione de tripla relinquitur.



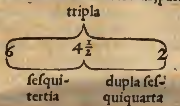
SVBDVCTIONEM hanc recte factã eſſe probabis, ſi propor-

tionis relictæ denominationẽ addes ad ſubductæ,ſicuti modo diximus. Vel ſi mauis, proportionem relictam ad proportionẽ ſubductã adde,per alterius terminos in alterius ducendos,ſicuti proximo capite docuimus : quãdoquidem illa etiam via redibit proportio à qua ſubductio facta eſt. nã ſi 18 priorem terminum relictæ,ducas in 4 priorẽ ſubductæ,fient 72: & ſi 8 poſteriorem terminum relictæ duces in 3 poſteriorẽ ſubductæ,ſurgent 24:quæ proportionem illã fuiſſe triplam,à qua ſubductio facta eſt,deſignant.

QVÒD ſi plures proportiones ab vna ſubduci debent, prius in vnam proportionem,velut in ſummam quãdam,omnes ſunt addendæ,& tum demum ad eius ſubductionem procedendum,modo non ſit facta maior quàm ea à qua ſubductio fiet. Porrò ſunt nonnulli qui ſingulas ſeorſum ſubducunt:Cæterum maiorem ea res laborem pariet,quàm ſiquis omnes ſubducendas prius in ſummam colligens vnicam ſubductionem faciat.

PROPORTIONVM itaque ſubtractionẽ duob⁹ his modis fieri vides:altero per denominationum ſectionem: altero per earum terminos oblique,vti diximus,multiplicãdos. Tertius quoque modus ex his duobus mixtus inuentus eſt,qui & proportionẽ relictã, & ſubductam, necnon illam etiam à qua ſit ſubtractio,vna opera ante oculos ponit. Is autẽ eſt huiuſmodi, Proportio illa à qua fit ſubductio,ſuis numeris in primis notetur.Deinde inter maiorem illius terminũ & minorem tertius numerus medius apponatur,ad quem ea proportione maior terminus ſe habeat qua ſit ipſa proportio quæ ſubduci debet. Ita inter numerũ medium & terminũ minorem inuenietur ea proportio quæ ex ſubductione reſtabit. Exempli gratia, A proportione tripla inter 6 & 2 ſubducamus ſeſquitertiam.Poſtquã notata ſunt 6 & 2,numerus exquirẽdus eſt ad quẽ maior terminus,videlicet 6,proportione ſeſquitertia quæ ſubducenda eſt,ſe habeat.Eum autẽ numerum facile inuenies, ſi memoria tenes regulam quam ſuprà enarrauimus,quæ eſt huiuſmodi,Quando maior terminus proportionis cuiuſuis vnà cũ eius denominatione notus eſt, ſi ipſum terminũ per proportionis illius denominationem diuidas, minor terminus ignoratus ex numero ſectionis inuenietur. Igitur 6 illa quæ ſeſquitertiæ proportionis, quam inueſtigamus,maiorẽ terminum præſtant,per eius denominationem $1\frac{1}{3}$ diuidenda ſunt:& numerus partitionis proferet $\frac{18}{4}$, quæ faciunt $4\frac{1}{2}$.Is terminus minor erit proportionis ſeſquitertiæ inter 6 & $4\frac{1}{2}$. Deinde poſtquã per comparationẽ maioris extremi

ad medium numerũ interſertum, proportionem auferendã deprehendiſti, rurſus cõpara medium numerũ ad extremum minus: & proportionẽ eam quæ ex ſubductione relinquetur, inter eos reperies quæ eſt dupla ſeſquiquarta. Id ita eſſe probabis, ſi relictæ duplæ ſeſquiquartæ denominationẽ ad ſubductæ ſeſquitertiæ (ſicuti monſtrauimus) addes: rurſus nãque naſcetur proportio tripla. Per hanc ſubducẽdi viã tres proportiones ſimul ante oculos licet cernere: vnã, à qua ſubducimꝰ: alterã, quã ſubducimus: tertiã, quã relinquimus. Itidẽ etiam apparẽt ſingularũ termini. Ad hæc proportionũ differẽtiæ, quæ ex ſubductione oriũtur, pateſiũt per hũc modũ,



PROPORTIONVM igitur additio multiplicationi numerorũ ſimilis eſſe videtur. At earũ ſubductio magnopere diuiſionis, præſertim eius quæ fit in minutijs, ſimilitudinem refert. Id quod ea quæ hoc capite, & proximo ſunt dicta, manifeſtum faciunt.

DE PROPORTIONVM MVLTIPLICATIONE.

MVLTIPLICATIO proportionum longe diuerſa eſt ab ea quæ fit in numeris. Numerus nanque eſt vnitatũ collectio. At proportio numerus nõ eſt, ſed ipſorũ numerorum inter ſe reſpectus & habitudo, quæ niſi inter duos minimùm numeros eſſe nequit. Igitur proportionẽ per proportionem, velut per quendã numerũ multiplicari, ſenſus cõmunis nõ admittit. Cæterum quãdo proportio proportioni eſt addẽda, numeri ipſas denominantes, aut ipſarũ termini, per aliarum denominationes, aut terminos multiplicari poſſunt, ſicuti ſuprà de earũ additione facienda dictũ eſt. quæ denominationũ aut terminorũ multiplicatio eſt additio ipſarũ habitudinum. Ita proportionũ diuerſarum collectionem in vnã ſummã, vulgus multiplicationẽ putat, quòd per eã fiat, cũ tamẽ ſit additio. Quare proportionũ aliarũ per alias multiplicatio, eo modo quo fit in numeris, nulla proprie eſſe poteſt.

VERVM ſi per proportionũ multiplicationẽ intelligis ſimilem & cõtinuam generationẽ plurium numerorum proportionalium ex vna ſtirpe naſcentium, & ſecundũ datam proportionem minimorum, ea fiet ad hunc modũ, Proportio quæuis, cui complures

ſimiles continuare cupis, minimis numeris qui eam proportionē habeant, velut ſtirps quædam ex qua cæteræ proditurae ſunt, notetur. Deinde prior eius terminus in ſe multiplicetur, productúſque numerus ſignetur: iterū idem terminus ducatur in poſteriorē, productúſque ſecundus apponatur numerus. Tertio poſterior terminus ducatur in ſeipſum, numerúſque productus tertius tertio loco ſtatuatur: atque ita inter tres illos productos terminos duo interualla habētur, & duæ proportiones ſtirpis ex qua ductæ ſunt, ſimiles naſcuntur: eáque proportio quæ inter eorum extremos eſt, duas alias medias complectitur. Exempli gratia. proportionē ſeſquialterā ſignemus his numeris 3 & 2: ducamúſque 3 in ſe, & 9 ſurgent. Iterúmque 3 in 2 ducamus, & fient 6. Deinde 2 in ſe multiplicemus, & prodibunt 4: inter quos tres numeros productos 9. 6. 4. duæ proportiones ſeſquialteræ cōtinuantur: & inter primum 9 & vltimum 4 dupla ſeſquiquarta ex illis duabus ſeſquialteris cōpoſita inuenitur. Et quia 9 & 4 illorum trium terminorum continuè proportionalium extremi, cōtra ſe ſunt primi, ideò tres illi ſecundum datam proportionē ſunt tres minimi. Nam ſecundū Euclidem, Si numerorum quotlibet continuè proportionalium duo extremi fuerint contra ſe primi, eos omnes, ſecundum ſuam proportionem in totidem numeris ſumptā, minimos eſſe neceſſe eſt. Quòd ſi quatuor numeros eadē proportione procreare volumus, primum terminum ſtirpis in omnes tres numeros productos ſingulatim ducamus, numeróſque ex his denuo productos ſeorſum notemus. Deinde ſecundū terminum ſtirpis multiplicemus in tertium productū ſolum: & numerus ex hoc productus quarto loco ſignetur. Igitur in exemplo priore quatuor numeros & tres ſeſquialteras procreaturi, primū numerum productū, videlicet 9 in 3 ducamus, & ſurgent 27. Iterum 6 ſecundum productum, in 3 ducentes, 18 formabimus. Rurſus 4 tertium productū, in 3 multiplicantes, producemus 12. Demúmque ſecundum terminum ſtirpis, videlicet 2, in ſolum tertium numerum antè productum, videlicet 4 ducentes, efficiemus 8: qui quartus erit numerus: inter quos quatuor numeros proportiones ſeſquialteræ tres habentur: & proportio inter primum 27, & vltimum 8, ex tribus illis coaceruata comperietur, tripla ſupertripartiens octauas. Et quoniam 27 & 8 qui quatuor illorum continuè proportionalium extremum locum tenent, ſunt contra ſe primi, ideò quatuor illi ſecundum datam proportionem ſunt quatuor minimi. Eodem modo priorem termi-

num ſtirpis ducētes in omnes quatuor illos numeros vltimo productos,notantéſque numeros rurſus producendos,& deinde poſteriorem ſtirpis terminum in ſolum quartum poſtremo productum multiplicantes, formabimus quinque numeros, & quatuor continuas proportiones ſeſquialteras. Síc que etiam vlterius quotlibet numeros eadem proportione cōtinue formare licet: vti ſubiectæ notæ monſtrant.

81.		54.		36.		24.		16.
	27.		18.		12.		8.	
		9.		6.		4.		
			3.		2.			

QVOD ſi cui proportionem per numerum aliquem multiplicare libet,tunc proportionis denominatio velut aliqua alia res numerata accipietur: & ideo quot vnitates in numero producto reperientur,totidem proportiones illius denominationis per numerum illum productū deſignabuntur. Veluti ſi vnā triplam per numerum ternariū multiplicare velimus,ſurgent 3 triplæ:ſi duas triplas in ternariū ducamus,fient 6 triplæ. Similiter ſi vnā quadruplā per ternariū multiplicemus,prodibūt 3 quadruplæ:ſi 2 quadruplas in ternarium ducamus,orientur 8 quadruplæ:& ſic de alijs fiat.

DE PROPORTIONVM DIVISIONE.

DIVISIO proportionis fit,quando inter eius extrema vel vnus termin⁹ medius, vel plures interponūtur: quo fit vt diuidēda proportio in totidē alias proportiones ſecetur, quot interualla inter eius extrema ex illa interpoſitione oriuntur. qua de re ſuperius abūde diximus,quādo docuim⁹ quomodo proportione quauis occurrente,proportiones aliās ipſam cōponentes inueſtigares. Exempla illic explicata hic tantū attingemus. Si proportionē diuidendam partiri in duas proportiones cupis, vnicus terminus interſerēdus eſt. Veluti ſi in ſedecupla proportione inter 16 & 1 interponas 8, in duas proportiones eam ſecabis: quarū vna inter 16 & 8 dupla erit, altera inter 8 & 1 octupla. At ſi in eadē ſedecupla inter eius extrema,tres terminos interpones,vtpote 8.6.5 vt quinque terminorū hic ſit ordo,16.8.6.5.1. in quatuor proportiones ſectio per hoc fiet:quarū prima erit dupla,ſecūda ſeſquitertia,tertia ſeſquiquinta,quarta quintupla. Similiter etiā fiet,ſi quotlibet terminos medios appones:nam in totidem proportiones facta erit ſectio, quot inter primum & vltimū comperientur inter-

o.iij.

ualla. Nec quicquã refert qui termini medij inſeratur, etiam ſi ma iore extremo maiores ſint, aut minore minores, quemadmodũ illic latius explicauimus. Ad hunc modum diuiſio fit in proportionibus, nec vlla alia quàm hæc eſt, in eis reperitur.

Quomodo proportionẽ inter quoſuis numeros aſſignatam inuenias in minimis numeris qui eam proportionẽ habeãt.

INTER quoſlibet numeros aſſignatam proportionem inuenire potes in numeris ſecundũ eam proportionem minimis, ad hunc modum. Principio obſeruandum eſt an numeri ipſius datæ proportionis ſint cõtra ſe primi, vt nullus numerus eas numeret præter vnitatem : nam ſi ſunt huiuſmodi, illi ipſi ſunt ea proportione minimi. Sin autem alius numerus præter vnitatem eos numerat, maximus numerus vtrunque communiter numerans eſt inueſtigandus: & per illum inuentum vterque numerorum, tam antecedens quàm conſequens diuidendus. Quo fiet vt in numeris ambarum ſectionum minimi eiuſdem proportionis numeri appareant. Nam maximus numerus duos communiter numerans numerat eos, per minimos illius proportionis numeros. Quomodo autem maximus numerus duos cõmuniter numerans ſit inueſtigandus, ſuprà libro ſecũdo copioſius admonuimus, quando docuimus, Quomodo partes ad minimã ſui nomenclaturã redigantur. Quare quæ illic de numeratore & denominatore partium ſunt dicta, hic de numero antecedente & numero cõſequente cuiuſque proportionis repetita intelligantur: nam idem vtrobique modus eſt & partes ad minimam ſui nomenclaturam, & proportiones ad minimos numeros ipſas habentes, reducendi. Exemplum demus in numeris contra ſe primis. Inter 7 & 3 proportio dupla ſeſquitertia eſt: nec minores numeri haberi poſſunt, inter quos ſit ea proportio. Exemplum demus in alijs numeris cõmunicantibus, quos communis aliquis numerus alius quàm vnitas metitur, Veluti inter 35 & 15, inter quos proportio dupla ſeſquitertia ex ſectione maioris per minorem reperitur. Et quia vterque illorum numerorũ numeratur à 5, qui maximus numerus eſt eos cõmuniter numerans, vtrunque per 5 diuidamus: & ex ſectione 35 facta per 5, in numero partitionis 7 inueniuntur. Iterũ per 5 diuidamus 15, & in numero ſectionis 3 prodeunt: ſic ex duabus illis ſectionibus minimi numeri 7 & 3 cõperiuntur, inter quos proportio dupla ſeſquitertia haberi poteſt.

Quomodo proportionum diſiunctarum ſimilitudo inueniri poſſit in minimis numeris ſecũdum ipſas proportiones continuè proportionalibus.

P ROPORTIONVM quarũlibet quæ ſeparatæ ſunt,& diſiunctæ, ſimilitudo in minimis numeris cõtinuatim proportionalibus ſecundũ illas ipſas proportiones diſiũctas, inueniri poteſt hoc modo. Notẽtur quæuis proportiones diſiunctæ,ſuis quæque minimis terminis. Deinde minim⁹ numerus exquiratur, quẽ primæ proportionis extremũ conſequens, & extremum antecedens ſecũdæ numerant. nam is inuentus primã proportionẽ cum ſecũda copulabit. Extremũ autem antecedẽs ei adiungendũ,ita demum inueniemus,ſi primæ proportionis antecedens per eum numerũ multiplicamus, per quẽ primæ extremum cõſequens multiplicatũ,producit minimũ ab eo,& antecedẽte ſecundæ numeratũ. Conſequens verò ſecundæ proportionis continuandæ exquiremus, ſi per eum numerũ multiplicemus cõſequẽs ſecũdæ proportionis diſiũctæ,per quẽ antecedens eiuſdẽ procreat minimũ numerũ ab ipſo, & primæ diſiunctæ cõſequente numeratum. Deinde ſi antecedens tertiæ proportionis diſiunctæ, per aliquem numerũ numerat conſequẽs ſecundæ cõtinuatæ,per eundẽ multiplica cõſequens tertiæ diſiunctæ,& produces cõſequens proportionis tertiæ,cũ duabus ſuperioribus cõtinuandæ. Sin autẽ tertium antecedens diſiunctæ proportionis per nullum numerũ numerat cõſequens ſecũdæ continuatæ,inquirendus eſt minimus numerus,quẽ conſequens ſecundæ continuatæ,& antecedens tertiæ diſiunctæ numerant:is autem inuentus,antecedẽs erit tertiæ proportionis continuatæ. Poſtea ſi conſequens tertiæ diſiunctæ multiplicabis per eũ numerum,per quẽ antecedens eiuſdẽ multiplicatum,producit minimũ ab eis numeratũ,prodibit conſequẽs tertiæ continuatæ proportionis. Deinde ſi reliquos terminos antè cõtinuatos multiplicabis per eum numerũ,per quem cõſequens ſecũdæ cõtinuatæ producit minimũ à ſe & ab antecedente proportionis tertiæ diſiunctæ numeratũ,tres proportiones diſiũctim propoſitæ cõiungẽtur:idque in minimis terminis. Et quanquã duæ primæ proportiones,antè in minoribus terminis cõiunctæ erãt, has tamẽ tres vniuerſas in minoribus terminis copulare nõ licet. Atque ad eundẽ modũ quotlibet proportiones cõtinuari poſſũt. Exẽplũ afferamus de tribus ꝓportionib⁹,vt res magis appareat:redigamuſq; ad minimos numeros continuè ꝓportionales has tres pro-

portiones, videlicet primã, triplam ſupertriquartã: ſecundam, ſubquadruplam ſeſquialterã: tertiam, ſeſquialterã. Porrò minima tripla ſupertriquarta reperitur inter 15 & 4: minima ſubquadrupla ſeſquialtera inter 2 & 9: & minima ſeſquialtera inter 3 & 2, quos numeros minimos in ordinem deſignemus. Deinde primas duas proportiones per terminos cõtinuè proportionales copulaturi, minimum numerũ inquiramus, quẽ 4 conſequens primæ & 2, antecedens ſecũdæ numerãt: & quia hi ſũt numeri cõmunicãtes, ideò minimi illius proportionis, cuius ipſi ſunt, inquirãtur. Illi autẽ ſunt 2 & 1, qui inuẽti ſubnotẽtur, 2 ſub 4, & 1 ſub 2. Ita ſiue 1 in 4, ſiue 2 in 2 ducamus, cõperiemus 4 minimum numerũ numeratum ab eis. nam ſecundũ Euclidem, Quilibet duo numeri minimos numeros ſuæ proportionis maior minorem, aut minor maiorẽ, multiplicãtes, minimũ ab ipſis numeratum producũt: quare ſupra verticem inter primã proportionem & ſecundam illum annotemus. Poſtea antecedens ei adiungendum inueſtigemus. & quia 4 cõſequens primæ numerat 4, minimũ numerum numeratum à conſequente primæ, & antecedente ſecũdæ per vnitatẽ: per eam multiplicemus antecedens primæ 15, & ipſa 15 prodeunt, quæ ſupra verticem ſignata antecedens erunt ad illa 4 ſuprà annotata. Deinde vt cõſequens ſecundæ proportionis cõtinuandæ exquiramus: quia 2 antecedens ſecũdæ diſiunctæ per 2 multiplicata producunt 4, minimum videlicet numerũ numeratum à conſequente primæ diſiunctæ, & antecedente ſecũdæ diſiunctæ: per illa 2 multiplicemus 9 conſequens ſecũdæ diſiunctæ, & producemus 18: quæ ſupra verticem ſignata, cõſequens erunt proportionis ſecundæ continuatæ. Sic ex duabus proportionibus diſiunctis duas edidimus proportiones continuatas, quibus tertiã diſiunctã copulemus. Et quia ternarius antecedens tertiæ diſiunctæ numerat conſequens ſecundæ cõtinuatæ, videlicet 18 per 6, multiplicemus cõſequens tertiæ diſiunctæ, nempe 2, per illa ipſa 6, & prodibunt duodecim quæ erunt conſequens tertiæ cõtinuatæ. Ita quatuor hi numeri, 15. 4. 18. 12, cõtinuè proportionales erunt, ſecundum tres illas proportiones diſiunctas, videlicet triplam ſupertriquartã, ſubquadruplã ſeſquialteram, & ſeſquialterã. Minimi autem cõtinuè proportionales ſunt, in quibus has proportiones ſecundum illas diſiunctas inuenire licet: quia nulli totidem his minores hoc præſtare poſſunt.

15		4		18			12	
15	4	|	2	9	|	3	2	|

SIN autem tertium antecedens proportionis diſiūctæ, per nullum numerum numerat conſequens ſecundæ continuatæ: inquirendus eſt minimus numerus, quem conſequens ſecundæ continuatæ & tertium antecedens diſiunctæ numerāt. veluti ſi quadruplam inter 4 & 1 ſeſquialteram inter 3 & 2, ac triplam inter 3 & 1 continuare velimus: comperiemus eo modo quo iam diximus, primas duas proportiones quadruplā & ſeſquialterā his tribus minimis terminis 12.3 & 2, ſecundū datas proportiones cōtinuari. Quibus tertiā diſiunctā poſteà copulemus. & quia 3 antecedens tertiæ diſiunctæ, per nullum numerum numerat conſequens ſecundæ continuatæ 2, inquirendus eſt minimus numerus ab his numeratus. & quia 3 & 2 ſunt numeri contra ſe primi: alter in alterum ducatur, & producentur 6. quæ erunt antecedens tertiæ continuādæ: & ſupra verticē conſequētis ſecundæ continuatæ reponenda ſunt. Deinde quia 3 antecedens tertiæ diſiūctæ ducta in 2, produxerūt 6: ſimiliter per illa ipſa 2 multiplicemus conſequens tertiæ diſiunctæ, videlicet 1, & prodeunt 2. quæ erunt conſequens tertiæ continuatæ. Iam verò quia tertia proportio continuata inter 6 & 2, maiores habet terminos, quàm vt præcedentes antè continuati cum ea congruant, & conſequens ſecundæ continuatæ 2 multiplicata per 3, produxerunt minimum à ſe numeratum: multiplicemus per illa 3 antecedens ſecundæ continuatæ, videlicet 3: & prodeunt 9. quæ iam erunt antecedens ſecundæ continuatę, & ſupra verticem ante 6 ſtatuentur. Rurſus per illa 3 multiplicemus etiā antecedēs primæ continuatæ, videlicet 12: & producentur 36. quæ iam erunt antecedens primæ continuatæ: & ſupra verticē ante 9 reponi debent. Ita in his quatuor terminis, 36.9.6.2, continuatæ ſunt in minimis terminis tres proportiones, videlicet quadrupla, ſeſquialtera, & tripla, ſecundum illas tres diſiunctas datas. Ex hac autem poſtrema terminorum antè continuatorum multiplicatione per vnū & eundem numerū facta, propterea vt cum tertia continuata proportione conueniant, producuntur eædem proportiones quæ antè in minoribus terminis continuatæ erant. Nam ſecundum Euclidem, Si vnus numerus in plures ducatur, eadem erit numerorū inde productorum, quæ multiplicatorum proportio.

36		9		6	2
12		3		2	
4	1	3	2	3	1

HAC ratione his quartam proportionem diſiunctam, & quot-

lſbet alias per terminos continuè proportionales connectere licet: nam de primis quibuſque proportionibus primum expedire oportet:atque his adaptatis,ad alias tranſire.

De proportione habente medium duóque extrema.

APVD GEOMETRAS ſpecies quædam proportionis longe à prædictis diuerſa reperitur ,quam Euclides nuncupat proportionem habentẽ medium duóque extrema.Ea nũquam in paucioribus terminis quàm in tribus haberi poteſt , cum cæteræ proportiones inter duo conſtent. Qua in re ſimilitudinem proportionalitatis refert , & ad quorundam corporum dimenſionem,quæ ſine ea intelligi nequit,adinuenta. Geometris ad multa confert: ſicuti Euclides libro 13 multis præceptis explicat, qui etiã libro 6,propoſitione 29,ſecundum eam proportionem lineam ſecare docet.Verũtamen quia in numeris huiuſmodi proportio nõ habetur, nec ad ſupputationẽ facit ; nos Geometris eã relinquamus.

De progreſſione numerorum continuè proportionalium.

PROPORTIONVM cõtinuatarum progreſſio,quã Geometricam vocant,eſt plurium numerorum continuè proportionalium in vnam ſummam collectio:quæ compendium affert numerandi eos numeros inter quos cõtinua & æqualis eſt proportio:quanuis numerorum differentiæ ſint inæquales. Et quia proportionum ſpecies variæ ſunt,ideò variæ in his dantur progreſſionum regulæ.Quare à multiplicium ſpecie, in qua dupli primum occurrunt,faciamus exordium.

IN compluribus numeris duplis longa ſerie continuatis primus numerus à poſtremo ſubduci,& quod de ipſo poſtremo reliquum erit, ad ipſum integrum poſtremum addi debet. Sic ſumma quæ inde ſurget,omnes ſeriei continebit vnitates. nec quicquam refert à quo numero ſeries initium ſumat: neque an numeri proportionales ſint integri,an minutiæ . Exemplum demus in his numeris, 3.6.12.24.48. A poſtremo 48 ſubtrahe primum 3:& ſupererunt 45. ea adde ad 48: & fient 93. ea ſumma eſt illius progreſſionis. Idem erit ſi ab vnitate incipias,veluti 1.2.4.8.16.32.64. ab vltimo 64 deme primum 1. & reliqua, quæ ſunt 63,ad 64 adde, & creſcent 127. quæ ſumma eſt vniuerſorum,Regula hæc & certa eſt,& perpetua, ſicut illa de triplis.

QVANDO numeri tripli longa ſerie cõtinuantur : primum à

poſtremo ſubducito: & reliqui dimidium, quod de poſtremo ſupereſt, integro poſtremo adde. Ita numerus vniuerſorum prodibit, à quocunque numero ſeries incipiat: etiam ſi minutiæ interueniãt. Exemplo ſint hi numeri, 1.3.9.27.81. tolle primũ 1 à poſtremo 81, & reſtant 80. cuius numeri dimidiũ eſt 40: ea adde ad 81, & fiet 121, quæ ſumma eſt omnium. Similiter eueniet ſi à 2 incipias, 2.6.18 54. deme 2 à 54, & remanent 52: cuius numeri dimidium eſt 26. ea adde ad 54: & ſurgent 80, quæ ſumma eſt vniuerſorum.

SIN quadrupli numeri continuè proportionales occurrent, deme primum de poſtremo: & tertiam partem eius reliqui, quod de poſtremo ſupereſt, ad ipſum integrum poſtremũ adiunge: & ſumma vniuerſorum habebitur. Veluti in his numeris, 1.4.16.64. ſubtrahe primũ à 64: & 63 relicta ſunt, quorũ pars tertia eſt 21. ea adde ad vltimũ 64: & exeunt 85, ſumma omnium. Itidem erit in 2.8. 32.128. tolle 2 ab 128: & relinquuntur 126. quorum tertia eſt 42: quæ addita ad 128, procreant 170, ſummam vniuerſorum.

AT VBI numeri quintupli longa ſerie cõnectuntur: ſi primus à poſtremo dematur, & reliqui de poſtremo relicti pars quarta ad integrum poſtremum addatur: omnium naſcetur ſumma. Vtpote 1.5.25.125. ſubtrahe 1 ab 125, & reſtant 124. quorum quarta eſt 31. quæ addita ad 125, faciunt 156: quæ ſumma capit omnes. Sic in infinitum procedit ordo in multiplicibus: vt ſi progreſſio ſit in ſextuplis: poſt ſubductionẽ primi ab vltimo factã pars reliqui quinta iungatur vltimo. ſi in ſextuplis: poſt factam primi à poſtremo ſubtractionem, addatur vltimo pars ſexta. ſi in octuplis, poſt eiuſmodi ſubductionem pars ſeptima adiũgatur. ſi in nonuplis, pars octaua. ſi in decuplis, pars nona. & ſic in infinitũ poſt ſubductionem primi ab vltimo factam ea pars reliqui, quæ denominatur à numero vnitate minore quàm proportionis denominatio ſit, addatur ad ipſum vltimum: & omnium ſumma prodibit.

DE progreſſione autem numerorum ſuperparticularium vnius proportionis, dantur etiam regulæ. & in primis hæc de numeris ſeſquialteris. In numeris continuè ſeſquialteris ſi primus duplicatus ſubducatur ab vltimo triplicato: id, quod reliquum eſt, ſummam omniũ numerorũ monſtrabit. Exemplo ſint, 2.3.$4\frac{1}{2}$, $6\frac{3}{4}$. duplica 2, & fiunt 4. triplica $6\frac{3}{4}$: & ſurgent $20\frac{1}{4}$. à quibus ſubtrahe 4, & reſtant $16\frac{1}{4}$ ſumma vniuerſorum.

AT IN ſeſquitertijs primus numerus triplicatus ab vltimo quadruplicato demendus eſt, & reliquum indicabit omnium ſummã.

IN ſeſquiquartis primus quadruplicatus à poſtremo quintuplicato ſubducatur,& reliquum monſtrabit ſummam.

IN ſeſquiquintis primus quintuplicatus ab vltimo ſextuplicato dematur,& reliquum ſummam proferet.

IN ſeſquiſextis primus ſextuplicatus à poſtremo ſeptuplicato demptus omnium ſummam relinquet.Et ſic in infinitum, numerus ex multiplicatione primi in proportiõis denominationẽ productus ſubduci debet à numero producto ex multiplicatione poſtremi in numerum vno maiorem quàm ſit ipſa denominatio. ita reliquum monſtrabit vniuerſorum ſummam:nec refert à quo numero progreſſio ſumat initium.

SIMILITER ad alias proportionum ſpecies regulæ dari poſſunt,ſi cui obſeruare libet. Veruntamen niſi faciles ſint,multo ſatius erit per additionem , ipſorum numerorum ſummam colligere,quàm per flexuoſas ambages compendium ſectari. nam quorſum progreſſio,ſi compendium non affert?

DE FALSARVM POSITIONVM REGVLIS.

SVPEREST nunc vt viam aperiamus , per quam ex fortuitis coniecturis,atque ipſis quidem falſis,& ad quas errores inſequuntur , propoſitæ quæſtionis veritas explicetur. Arabes & Phœnices mercatura celebres,& à quibus Arithmetica profecta primum putatur,artẽ illam veritatis inueniendæ barbaro vocabulo Cathaym appellãt, Latini ſiue falſarum poſitionũ, ſiue falſarum coniecturarũ regulas vocant: per quas penè vniuerſa quæ ad negociationem attinẽt, atque alia pleraque poſſunt expediri, modo aliqua rei propoſitæ pars ſit certa & cognita. Per eã nanque miro compẽdio reliqua omnia ignorata , quãtumcunque ænigma præ ſe ferant,continuo inueſtigata in notitiam proferuntur. Qua in re dici non poteſt, quàm diuinis ingenijs præditi fuerunt primi huius ſcientiæ inuentores:quorum ſolertia factum eſt, vt quæ pleriſque imperſcrutabilia videntur , nullo negotio in lucem veniant . Porrò numerorum quæſtiones multæ ſæpe occurrunt,in quibus rei propoſitæ pars aliqua nobis cognita eſt,ſed alia eius pars quã maximè ſcire cupimus, à ſenſu cõmuni longe ſummouetur. Quam vt cum parte nota congruere faciamus, pro arbitrio noſtro fingere poterimus eam eſſe quæ magis apta videtur:& cũ obſeruauerimus , vel quàm propè coniectura noſtra rem attigit,vel quàm longe à ſcopo errauit,iterũ conijcere licet:vt ſi prio-

re coniectu parum profecerimus, ſaltem ſecundo propius accedamus. Quæcunque autem per vnicam poſitionem inueniuntur, ea etiam per duas expediri poſſunt. Cæterũ è conuerſo non idem eueniet. neque enim quicquid duæ poſitiones explicãt, id vnica præſtabit. Et quod maxime in his admirandum videtur, nihil refert quàm longe cõiectura nos fallat: nam per illos ipſos errores, regulæ mox dandæ nos ad veritatem perducent. De quibus dicere aggrediemur, & quidem prius de ea quæ per vnicam poſitionem, id quod quæſitum eſt, eruit.

REGVLA DE VNICA FALSA POSITIONE.

IN NVMERORVM quæſtionibus in quibus pars eſt cognita, pars eſt ignorata, frequenter euenit vt vnica coniectura fortuita, tametſi aberret à vero, id quod inueſtigatur manifeſtet. Nam cum obſeruamus quid ipſa coniectura parit, proportionémque annotamus quæ eſt inter id quod conijcimus, & id quod ex eo conſequitur: ad exemplum illius, inter partem cognitam & partem ignoratam, proportionem alteram procreare licet, dummodo nos adiuuet quatuor proportionalium regula quæ de tribus notis quartum ignotũ proferentibus ſuprà data eſt. quippe cum tria ſint cognita: primum id, quod conijcimus: ſecundum id quod ex eo conſequitur, inter quæ cadit proportio: tertiũ, quod de quæſtione propoſita eſt cognitum: certè quartum, quod ignoratum eſt, & tertio reſpondere debet, nequaquam latere poteſt. Ita vnica poſitio primam proportionem ſibi fingit. Ad cuius exemplum regula illa quatuor proportionaliũ ſuccedens, aliámque ſimilem proportionem formans, id quod quæſitum eſt, continuo in lucem profert. Exempla rem magis aperient.

VIATOR tot aureos in itinere reperit, vt eorum pars ſecunda tertiáque & quarta ſimul additæ facerent 50. Hæſitatur, quænam ſumma reperta erat. Pone quanuis ſummam quæ partes eas habeat: & vide an illius ſummæ partes denominatæ ſimul additæ faciant 50. Si faciunt, ea ſumma eſt quam quæris. Si non faciunt, vlterius inueſtigabis hoc modo, Finge ſummam repertam, quæ partes eas habeat, eſſe 12, cuius dimidium eſt 6, tertia pars 4, quarta 3, quæ omnes ſimul additæ faciunt 13. at tu quæris 50. Igitur coniectura te longe fefellit. Veruntamen ille ipſe error in viam te reducet, ſi rem bene conſyderes. Nam ſicut partes ſummæ per coniecturam poſitæ, quæ ſimul additæ fiunt 13, ſe habent ad ipſam ſum-

mam totam, quæ eſt 12, ſic partes ſummæ repertæ ſimul additæ, quæ ſunt 50, ad ipſam ſummam repertam quæ ignoratur, ſe habere debent. Atque ideo ad regulam de tribus notis negotiũ ſic applicabis, Si 13, quæ partes ſimul additas notant, veniunt ex 12 male à te poſitis: cuius ſummæ partes illæ eiũt, quæ collectæ cõplẽt 50? Sequẽs regulã multiplica 50 per 12, & ſurgent 600. ea per 13 diuide: & prodibunt 46 $\frac{2}{13}$. quæ ſumma aureorum reperta erat. cuius dimidiũ eſt 23 $\frac{1}{13}$, pars tertia 15 $\frac{5}{13}$, pars quarta 11 $\frac{7}{13}$: quæ partes ſimul additæ faciunt 50. Similiter eueniet, quæcunque alia ſumma quàm 12 per coniecturam ponatur modo partes eas habeat. Vides itaque per adiumẽtum regulæ de tribus notis vnica cõiectura fortuita rem expediri: nec duabus poſitionibus eſſe opus.

PER hanc regulam exempla quæ ſequuntur poſſunt explicari: quæ ſubijcienda duximus, vt ad ea iuuenes exerceantur.

INVESTIGETVR numerus in quo 5 ſint $\frac{2}{3}$. Pone numerũ quem voles, qui partes eas habeat, veluti 6: & vide quantum capiant $\frac{2}{3}$: & inuenies 4. at tu quæris 5. Scrutare igitur ſi 4 faciunt $\frac{2}{3}$ de 6: de quo 5 complebunt $\frac{2}{3}$? tenta, & inuenies 7 $\frac{1}{2}$.

EXQVIRATVR numerus ex quo, poſtquam pars tertia, pars quarta, & pars quinta ſubductæ ſunt, adhuc ſupererũt 24. Pone numerum aliquem qui partes eas habeat, Veluti 60. Poſtea deme partes illas, & vide quid reſtabit: & inuenies 13. Ecce quantum errasti, quæſiuiſti 24, at inueniſti niſi 13. Quamobrem ſic tecum ratiocinare, Si 13 poſt partes ſubductas ſuperſũt de 60, de quo numero poſt ſubductas partes, relicta erunt 24? Tenta per regulam de tribus notis, & inuenies 110 $\frac{10}{13}$ numerum illum eſſe, cuius pars tertia eſt 36 $\frac{12}{13}$, quarta 27 $\frac{9}{13}$, quinta 22 $\frac{2}{13}$. quæ omnes ſimul additæ faciũt 86 $\frac{10}{13}$. Et ſi ſubducantur à 110 $\frac{10}{13}$, reſtabunt 24.

SIQVIS numerum exquiri iubet, à quo parte ſecunda, tertia, & quarta ſubductis, reſtent 24, Continuo reſponde, id fieri nequaquam poſſe. Nam quicunque numerus ſumatur qui partes eas habeat, ſemper minor erit quàm partium ipſius ſumma coaceruata, quo fiet, vt ne illa quidem ſubduci poſſit, nedum quicquam reſtare. Quippe (vt obiter admoneamus) tres ſunt numerorum ſpecies. Vna eſt eorum qui partium ſuarum ſummam maiorem habent, quàm ſint illi ipſi. hi abundantes vocantur. cuiuſmodi numerus eſt 12. nã huius dimidium eſt 6, pars tertia 4, quarta 3, ſexta 2, duodecima 1. quæ partes ſimul additæ redundant in 16, & corporis ſui numerum vincunt. Item 24 numerus eſt abundans: nam eius di-

midiũ eſt 12,pars tertia 8,quarta 6,ſexta 4,octaua 3,duodecima 2,vicesima quarta 1.quarum ſumma redũdat in 36. Altera eorum ſpecies eſt qui diminuti vocantur,in quibus ſumma partiũ ſimul poſita minor eſt, quàm ſint ipſi. cuiuſmodi numerus eſt 8.nam eius dimidium eſt 4 , pars quarta 2,octaua 1: quarum partium collecta ſumma 7,minor eſt quàm totum corpus.Item 14 numerus eſt diminutus: nã dimidium eius eſt 7,pars ſeptima 2, quartadecima 1. ſumma omnium 10,toto corpore minor eſt. Tertia ſpecies eorum eſt, in quibus partes in ſummam collectæ ſuo corpori ſunt æquales.Hi,quia nec exceſſum nec defectum habent,perfecti vocantur: cuiuſmodi numerus eſt 6. nam eius dimidium eſt 3, pars tertia 2, ſexta 1.quæ partes cõpoſitæ reddunt etiam 6. Item 28 numerus eſt perfectus:nã dimidiũ habet 14,quartã partem 7, ſeptimã 4, quartamdecimam 2,viceſimamoctauã 1:quæ partes coaceruatæ ſuo toto numerũ æqualem faciunt 28.Hi numeri perfecti,quòd rari ſint, viris bonis aſſimilantur. Itaque vt ad rem redeamus:minimus numerus,qui $\frac{1}{2}\frac{1}{3}\frac{1}{4}$ habeat,eſt 12: huius dimidium 6,tertia 4,quarta 3.partes hæ collectæ proferunt 13:quæ à 12 ſubduci nequeunt. Quòd ſi numerus maior partes eaſdem habens ſumatur , partium ſumma maior redundabit.Ita nunquam fiet earum ſubductio,nedum quicquam reſtabit . Quare propoſitis huiuſmodi quæſtionibus, continuo priuſquam ad illas reſpondemus, nobiſcum meditemur an poſſibilia ſuggerant , ne labor irritus fruſtra ſuſcipiatur.

S I 4 eſſent 6,quis numerus eſſet 10? Priuſquã reſpondes, quære ab interrogante,quid intelligat ſermone tam ambiguo,vtrum velit 4 creſcere ad 6,an 6 minui ad 4.Etenim ſi 4 creſcunt ad 6, eadẽ ratione 10 ad 15 creſcent.Nam ſi 6 in 10 ducas,creſcent 60. quæ ſi ſeces per 4,prodeunt 15. At ſi 6 ad 4 minuere voles,ſic rationẽ facito,Si 6 fient 4, quid fient 10?Ducatur 4 in 10,& ſurgent 40. quæ diuide per 6,& exeunt 6 $\frac{2}{3}$. eouſque minuenda eſſent 10.

Itidem ſiquis ſic roget,Si $\frac{1}{2}$ de 5 eſſent 3,ipſa 5 cuius numeri eſſent $\frac{1}{4}$? Quærendum ante omnia eſt quid ſibi velit.Nam ſi dimidium de 5,quod eſt 2 $\frac{1}{2}$, creſcere debet ad 3, eadẽ ratione 5 per regulam de tribus notis creſcent ad 6,& erunt $\frac{1}{4}$ de 24.At ſi 3 minui debent ad 2 $\frac{1}{2}$,eadem ratione 5 per regulam de tribus notis minui debent ad 4 $\frac{1}{6}$. & erunt $\frac{1}{4}$ de 16 $\frac{2}{3}$.

S I 3 eſſent $\frac{1}{2}$ de 7:quæ pars 4 eſſent de 11? ſi 3 creſcere debent ad 3 $\frac{1}{2}$: ſcrutare quid ſecundum eam rationem 4 eſſe debent. & per regulam de tribus notis inuenies ea creſcere ad 4 $\frac{1}{3}$. Iam viden-

dum $4\frac{1}{3}$, quæ pars ſunt de 11. id quod ſcies, ſi 11 per $4\frac{1}{3}$ ſeces: ſic prodibũt $2\frac{7}{13}$.. ea pars 4 erunt de 11. Nam ſecundum hoc thema 11 immota manent. Animaduertere itaq; oportet, quid ſit quod quæratur: ne reſponſum aberret à quæſito. Porrò ſi $\frac{1}{2}$ de 7 minui deberent ad 3: conuerſa ratione ſupputandũ eſſet. ſicuti in proximis ſupradictum eſt.

EXQVIRANTVR duo numeri, in quibus $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{3}$ vnius ſint, $\frac{1}{4}$ & $\frac{1}{5}$ alterius. Accipe aliquem numerum qui vnam ſecundã & vnam tertiam habeat, puta 54. cuius $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{3}$ ſint 45. Poſteà vt ſcias cuius numeri illa 45 ſint vna quarta & vna quinta, per poſitionẽ vnicam inueſtigare licet hoc modo, Pone quenuis numerum, qui $\frac{1}{4}$ & $\frac{1}{5}$ habeat: vtpote 60. Deinde vide qui numerus ſit quarta & quinta illius: & inuenies eum eſſe 27. At tu quærebas 45. Sic igitur per regulam de tribus notis ratiocinare, Si 27 ſunt quarta & quinta de 60: quis numerus eſt cuius quarta & quinta ſunt 45? Scrutare ſequens regulam: & inuenies eũ eſſe 100. ſic 54 & 100 numeri ſunt quos quærebas. Alia etiam via, atque ea quidem compendioſa, id inueſtigari poteſt ad hunc modum, Eæ minutiæ quæ ad vnum numerum vtrinque ſpectant, ſimul addantur, vt ſint vnæ minutiæ. quo fiet vt $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{3}$ per additionem collectæ, faciant $\frac{5}{6}$. At $\frac{1}{4}$ & $\frac{1}{5}$ per additionem iunctæ facient $\frac{9}{20}$. Deinde hæ minutiæ ſeorſum coaceruatæ, alteræ contra alteras annotentur. & vterque denominator in alterarum numeratorem oblique in crucis formam ducatur: numeríque producti reponantur iuxta ſuum vterque denominatorem à quo ductus eſt. Ita ex ea multiplicatione 54 iuxta $\frac{5}{6}$ habebuntur, & 100 iuxta $\frac{9}{20}$. qui numeri partes eo modo, quo præſcriptum eſt, communicantes habebunt. Numerus autem qui ambobus ex obliqua multiplicatione productis inæqualiter communicat, is eſt qui ex numeratorum mutuo in ſe ductu ſurgit, videlicet 45. nam 45 ſunt $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{3}$ de 54. Itémque 45 ſunt $\frac{1}{4}$ & $\frac{1}{5}$ de 100. Hoc compendium inueniendi numeros, qui partes ad hunc modũ inæqualiter communicantes habeant: ad multos in numeris nodos explicandos plurimum iuuabit, ſi in promptu habeatur.

$$\frac{1}{2}\quad\frac{1}{3}\qquad\qquad\frac{1}{4}\quad\frac{1}{5}$$

$$54\ \frac{5}{6}\times\frac{9}{20}\ 100.$$

MERCATOR argenti libram, quæ de nota atque indicatura 8 ſcrupulorum erat, aureis 9 emit. quæro, ſi ſecũdum eam rationem velit de nota 10 ſcrupulorum emere libras 20: quot aureis conſtabunt? Pone vt libet, puta cõſtituras aureis 80: vt ſingulæ libræ væ-

neant aureis 4. Vide quid ſecūdum eā rationē vna libra de nota 8 ſcrupulorū cōſtabit. id quod facies ſic ratiocinādo, Si argenti nota de 10 profert vnius libræ pretiū 4, quod pretiū vnius libræ dabit nota ſcrupulorum 8? Sequere regulam de tribus notis: & inuenies eā dare $3\frac{1}{5}$. at tu ſcis eam dare 9. Quamobrē ſic ſupputabis, Si $3\frac{1}{5}$ prodeūt ex 80 quæ coniectura poſuit, de quo prodibunt 9? Ducantur 9 in 80: & ſurgēt 720. quæ ſi ſeces per $3\frac{1}{5}$, in numero partitionis prodeūt 225. tot aureis libræ 20 de 10 ſcrupulorum nota conſtabunt, quarum vnaquæque pretij erit aureorum $11\frac{1}{4}$.

QVI argenti libram de 10 ſcrupulorum nota, aureis 11 emit, poſteà libras argenti 25 de alia nota aureis 200 mercatus eſt: quæro cuius notæ fuerunt? Quia earū vnaquæque conſtitit aureis 8, ſic ratiocinabere, Si 11 aurei reddunt notam 10: quam notam reddent aurei 8? Scrutare, & inuenies $7\frac{3}{11}$. ea nota & indicatura librarum 25 erat. Hic propter facilitatem nulla poſitione fuit opus.

COMPLVRES huiuſmodi quæſtiones, & multæ etiam ex his, quas ſuprà libro tertio explicauimus, per vnicam poſitionem, adiuuante regula de tribus notis, ſolui poſſunt.

REGVLA DE DVABVS FALSIS POSITIONIBVS.

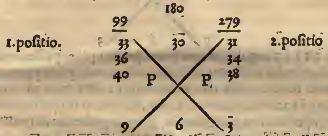
INNVMERAE quęſtiones in numeris occurrūt, quæ tametſi earū pars ſit cognita, pars ſit ignorata, per vnicā cōiectură explicari nequeūt: at hæ per duas poſitiones ſtatim expediētur. In quibus ante omnia obſeruare oportet, quàm propè vtraque poſitio vel accedit ad verū, vel à vero recedit. Itē ipſorū errorū differētia magnopere notanda eſt. Nā per obſeruationem approximationis vtriuſque poſitionis ad verū, & per differentiam errorū qui ex his inſequuntur, veritas in lucem veniet. quæ duobus modis inueniri poteſt, videlicet vel per regulas pluris & minoris, vel per differentiarū obſeruationē. Itaq; de plure & minore quatuor hæc præcepta ſunt in primis ediſcēda. Primū, Si vtraque poſitio plus quàm verū cōijcit: alterum plus ſubducere ab altero plure oportet. Secundū, Si vtraque poſitio minus quàm verū affert, alterum minus ab altero minore ſubtrahēdum eſt. Tertiū, Si prior poſitio plus, poſterior minus profert, tum plus & minus in vnū ſunt addēda. Quartum, Si prior poſitio minus, poſterior plus cōiectat, tum minus & plus in vnū coniungātur. Ita cum his quatuor modis coniectura varietur, primis eorū duobus videlicet ſiue vtraque coniectura plus, ſiue vtraque minus ponat, alterius ab altero ſub-

ductio fieri debet:at poſtremis duobus, videlicet quādo prior poſitio plus, poſterior minus cōijcit, vel ė conuerſo:pluris & minoris additio neceſſaria eſt. Et quo facilius has præceptiones ſtudioſi memoria tenerēt, Morus, rogatu noſtro, redegit eas in hoc carmē,

A plure deme pluſculum,
Minus minori ſubtrahe:
Pluri minus coniungito,
Atque ad minus plus adijce.

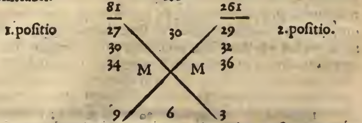
HARVM primæ regulæ in qua vtraque poſitio plus affert, ſenſus eſt, Si per priorem poſitionē atque item per poſteriorem plus quàm veritas exit: tunc alter error plus afferens ab altero plus afferēte ſubducēdus eſt:& id quod reſtat, diuiſor totius operationis erit. Poſtea prior error ducendus eſt in poſitionē poſteriorē. itémque error poſterior in poſitionē priorē ad formā obliquæ crucis: & numerorum ex his duabus multiplicationibus productorū alterius ab altero fit etiam ſubductio. Deinde id quod reliquum eſt, per errorum differentiam diuiditur, atque ita numerus partitionis veritatem profert. Exemplum præbeamus. Tres mercatores aureos centum lucrifactos ſic diuiſerunt, vt ſecundus tres aureos plures quàm primus caperet, tertius quatuor plures quàm ſecundus: Libet inueſtigare, quot aureos quiſque habuit. In primis magna crux obliqua, formam referēs X literæ Græcæ, quam vulgus crucē diui Andreæ vocat, in abaco depingenda eſt. Poſt id factum coniecturas aggrediamur, & ponamus primum mercatorem accepiſſe 33 aureos: quo fiet vt ſecundus 36, tertius 40 debuerit accipere. quæ ſummæ collectæ faciunt 109. At tantū 100 erant diuiſi. ita in 9 errauimus, qui error ex illorū 33 falſa poſitione, quæ nimia erat, natus eſt. Eapropter illam poſitionem 33 ad verticem ſiniſtrū depictæ crucis ſignemus: errorem verò ex ea inſecutum qui capit 9, annotemus ad pedem ipſius crucis ſiniſtrum. Et quia plus quàm verum coniectura peperit, P litera ad ipſum plus ſignificandum, inter ſiniſtrum verticem & ſiniſtrum pedem in intimo crucis ſinu ſcribatur. Deinde quia priore coniectu parum profecimus, iterum tentantes, fingamus primum mercatorem aureos 31 habuiſſe: ea ratione ſecundus 34, tertius 38 accepit. quorum ſumma collecta profert 103. At tātum 100 ſunt diuiſi. Quocirca ſecūda coniectura etiā ipſa plus quàm verum attulit, & errauit in 3. Quare poſitio illa ſecunda de 31 ad verticē crucis dextrum ſtatuenda eſt, errórque ex ea inſecutus ad pedem eius dextrū ſubnotetur: & P litera ad plus

ſignificandum inter dextrum verticem & pedem dextrũ in intimo ſinu ponatur. Deinde minor error 3 à maiori 9 ſubducatur. & 6 quæ reſtabunt, medio ſpatio inter vtrunque errorẽ notanda ſunt. Poſtea prior error 9 ducatur in ſecũdam poſitionem 31, & enaſcẽtur 279. Item ſecundus error 3 ducatur in priorẽ poſitionem 33, & producentur 99. quarum ſummarum productarũ minor 99 ſubducatur à maiore 279, & ſupererũt 180. Ea ſi per errorum differentiã videlicet 6, ſecẽtur, numerus partitionis proferet 30, quæ vera ſumma primi erat. Primus nanque 30, ſecundus 33, tertius 37 habuit. quæ ſummæ coaceruatæ faciũt 100, ſicut thema propoſuit. Ita demum veritas per duas falſas poſitiones inuenta medio ſpatio inter crucis vertices, in quibus hæ ſignatæ ſunt, annotanda eſt.



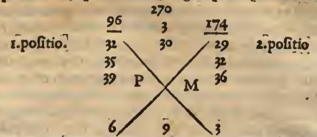
SECVNDAE regulæ, in qua vtraque poſitio minus affert, ſenſus pene primæ ſimilis, huiuſmodi eſt, Si per priorẽ poſitionem, atque item per poſteriorẽ minus quàm veritas habetur: alter error ab altero ſubduci debet. & reliquum erit diuiſor. Tum prior error in poſteriorem poſitionem, & error poſterior in poſitionẽ priorem ducatur: productorúmque numerorũ alterius ab altero fit ſubductio. & quod reliquum eſt per errorum differentiam ſecatur. Sic in numero partitionis veritas apparebit. Exemplum in themate modo dato præbeamus, & ponamus primum mercatorẽ habuiſſe 27, ſecundum 30, tertium 34: quæ ſummæ collectæ faciunt 91. At 100 ſunt quæſita. In 9 igitur erratum eſt. Itaque poſitio 27 in ſiniſtro crucis vertice, error 9 in ſiniſtro pede ſtatuatur. & quia error minus attulit, M litera quæ minus indicet, in ſiniſtrũ receſſum inter poſitionem & errorem condatur. Iterum deinde coniectura tentemus: & fingamus primũ mercatorẽ accepiſſe 29, ſecũdũ 32, tertiũ 36. quæ vniuerſa faciunt 97. At ſcopus erat 100. ſic 3 de numero deſtinato deſunt. Quocirca ipſa poſterior poſitio 29 in dextro crucis vertice ſignetur, & error poſterior 3 in pede dextro: atque M litera, quòd in minus ſit erratum, in dextro receſſu inter poſitionem

& errorem reponatur. Poſt id minor error 3 à maiori 9 ſubducatur: & 6 quæ reſtãt, medio inter errores ſpatio ſtatuantur. Tũ prior error 9 ducendus eſt in poſteriorẽ poſitionem 29: & naſcentur 261. Itẽ poſterior error 3 ducendus eſt in priorẽ poſitionem 27, & producentur 81. Horũ autem numerorum productorũ ſi minor à maiore ſubtrahatur, relinquentur 180. quæ ſi per errorum differentiã videlicet 6, ſecentur: numerus partitionis verum primi numerum 30 monſtrabit. 180

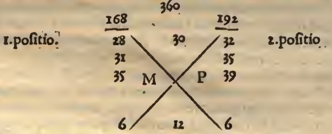


TERTIAE regulæ, in qua prior poſitio plus, poſterior minus affert, hic ſenſus eſt, Si per priorem poſitionem plus, per poſteriorem autẽ minus quàm veritas inuenitur: alter error ad alterũ addi debet, vt amborũ ſumma diuiſor fiat. Præterea poſtquam prior error in poſitionem poſteriorem, & error poſterior in poſitionem priorem ducti erũt: numeri ex his multiplicationibus producti in vnum ambo addendi ſunt. Quo fiet, vt ſi eorum ſumma per additorũ errorũ ſummam ſecetur, numerus partitionis veritatem in lucem proferat. Thema datũ rurſus tractãtes exẽplum afferamus: & ponamus primũ mercatorẽ accepiſſe 32, ſecũdum 35, tertiũ 39. quæ ſummæ collectæ faciũt 106: ſic 6 redundãt, quum 100 ſint quæſita. Poſitio igitur 32 ad ſiniſtrũ crucis verticẽ notetur, atque error 6 ad pedem eius ſiniſtrum, & P litera quæ in plus erratũ eſſe moneat, inter poſitionẽ & errorẽ in ſiniſtro crucis ſinu ſcribatur. Et quia coniectura nimium attulit, paulum infra tentemus: fingamúſque primum mercatorem habuiſſe 29, ſecundum 32, tertium 36. qui numeri collecti proferunt 97: atque ita 3 deſunt de numero 100 deſtinato. Eapropter ipſa ſecunda poſitio 29 ad dextrum crucis verticem, error autem 3 ad pedem eius dextrũ ſignetur: & M litera, quæ in minus erratũ eſſe mõſtret, in crucis dextro ſinu inter poſitionẽ & errorẽ reponatur. Deinde poſt amborum errorũ additionẽ quæ facit 9, prior error 6 in poſteriorẽ poſitionẽ 29 ducatur, & enaſcentur 174. Itẽ poſterior error 3 in poſitionẽ priorem 32 ductus, educet 96. Qui numeri producti ambo in vnum additi cõponũt 270.

Ea ſi per amborũ errorum collectã ſummã, *videlicet* 9 ſecentur, nu merus partitionis 30 procreabit, quæ vera primi ſumma erat.



QVARTAE regulæ, in qua prior poſitio minus, poſterior plus cõiectat, idem per omnia ſenſus qui tertiæ eſt: niſi quòd prior poſitio quæ minus affert, atque error ex ea inſequutus, ſiniſtrã crucis partem tenere debent: poſterior verò poſitio cum ſuo errore dextram. Cætera omnia eodem modo quo in tertia regula factum eſt, expediantur. Exemplum in themate iam dato ſpectandum ante oculos ſubiecimus, quod quiuis facile ſine præeunte explicabit.



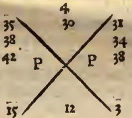
DIFFERENTIARVM OBSERVATIO.

PLVRIS & minoris regulis expeditis, differentiarum obſeruationẽ ab eiſdem præceptionibus pendẽtem, quæ etiã ipſa per duas falſas poſitiones expeditur, his adiungamus. Et quo magis manifeſtum ſit quãtulum hic explicandi modus ab illo iam dato differt, idẽ thema ſeruemus. Et fingamus primũ mercatorẽ accepiſſe 35, ſecundum 38, tertium 42, quorum ſumma collecta facit 115. ſic coniectura 15 plura quàm opus erat peperit. Quare poſitio 35 ad ſiniſtrũ crucis verticẽ, & error ex ea natus 15 ad pedem eius ſiniſtrũ ſtatuatur, & P litera ad plus denotandum in ſiniſtro ſinu cõdatur. Et quia cõiectura plus iuſto protulit, iterũ tẽtemus. & ponamus primũ mercatorẽ habuiſſe 31, ſecundũ 34, tertiũ 38: qua ratione omnes acceperunt 103, cũ tamen tantum 100 ſint di-

uiſi. Ita ſecunda poſitio in 3 quæ redundāt, errauit. Quocirca ipſa poſitio 31, ad verticem crucis dextrū: error 3 ad pedem eius dextrū: P litera, ad plus ſignificandū, in dextro ſinu reponatur. Poſteà poſitionū ipſarum differētia, per minoris à maiore ſubductionē deprehenſa, paulò ſupra mediū inter vtranque ſpatiū notetur: ea eſt 4. Atque itidem errorū differētia, per alterius ab altero ſubductionem inuenta, medio inter eos ſpatio reponatur: ea eſt 12. Deinde conſyderemus priorem poſitionem 35 occultū in ſe exceſſum & adhuc ignotū habentē, procreaſſe errorem excedentem in 15, & ſecūdam poſitionē 31 exceſſum etiā ignotū habentē, edidiſſe errorē excedentem in 3. Ex quo videre licet poſitionū differentiā 4, quæ inter earū vtranque media eſt, peperiſſe differētiam errorum 12, quæ media eſt inter vtrūque errorē. Et quoniā prior poſitio ſuperat ſecundam in 4, eo magis abducit à veritate per 12 quàm ſecunda. At ſecunda poſitio quia minor eſt priore per 4, eo magis appropinquat ad veritatē. Nihilominus tamen veritatē excedit in 3. Quare ſi magis fuiſſet imminuta, propius ad veritatē acceſſiſſet, & minorem aliquanto genuiſſet errorem. Eapropter inueſtigare oportet ad quem numerum ſecunda poſitio 31 ſit minuenda, vt nihil erroris pariat. Hoc autem manifeſtū fiet, ſi conſyderemus tres numeros proportionales nobis eſſe notos. Primus eſt poſitionum errantiū differētia, quæ eſt 4. Secūdus, qui ex ea naſcitur, eſt errorū differentia 12. Tertius numerus eſt ſecundus error 3 ex ſecūda poſitione errante exiens: qui magis ad verū appropinquat per 12, quàm prior error: eo quòd ſecunda poſitio minor eſt priore per 4. Quocirca quæ proportio eſt inter errorū differentiā 12 longius à veritate diſtantē, & errorem ſecundū 3 propius ad verū accedentē, hoc eſt inter vtrāque ſobolem: eadem eſſe debet inter vtrāque genitricē, videlicet inter poſitionū differentiā 4, quæ veritatē intercludēs peperit differentiā errorū: & illā ſecūdæ poſitionis differētiā à vero nos excludentem, & adhuc ignotam, quæ exceſſum in ſecundo errore edidit. Et permutatim, quæ proportio eſt inter errorum differentiam 12, & differentiam poſitionum 4, quæ eam peperit: eadem inter ſecundum errorem 3, & à vero nos excludentē ſecūdæ poſitionis differētiā, quæ eū ædidit, & adhuc ignota eſt, eſſe debet. Quāobrem regula de tribus notis quartū ignotum proferentibus, rem totam patefaciet, nobis ſic conſyderantibus, Si errorum differentia 12 venit ex falſarum poſitionum differentia veritatem intercludente, quæ eſt 4: de qua falſæ poſitionis differentia veritatem abſ-

condente veniet ſecundus error 3. Ducantur 3 in 4:& ſurgent 12. quæ ſecta per 12: in numero ſectionis edunt 1. tantũ minui debet ſecunda poſitio 31, vt veritas in lucē veniat. Illa enim vnitas erat, quæ exceſſum in ſecunda poſitione faciens ſecundũ errorē in 3 peperit. qua ſubducta, tollitur omnis error, & 30 reſtāt. qui numerus veritatē exprimens medio inter vtrãque poſitionē ſpatio notetur.

QVOD ſicui ſcire libet quis erat ille numerus qui in priore poſitione exceſſũ fecit, cõſyderet quæ proportio eſt inter errorũ differentiā 12, & priorē errorē 15, eādem eſſe debere inter poſitionũ differētiā 4, & illā prioris poſitionis differētiā quæ à vero nos excludit, & adhuc ignota eſt. Et permutatim, quæ proportio eſt inter errorũ differētiā 12, & poſitionũ differētiam 4, eādem eſſe debere inter priorē errorē 15, & illā prioris poſitionis differentiā à vero nos excludentē & ignotā. quare tractās regulā de tribus notis, tertio loco ſtatuat primũ errorē 15, hoc modo, Si differentia errorũ, quæ eſt 12, venit ex falſarũ poſitionũ differētia, quæ eſt 4: de qua falſæ poſitionis differentia veritatē in priore poſitione occultante naſcetur error primus 15. Ducantur 4 in 15, & producētur 60: quæ ſecta per 12, educent 5. Is exceſſus in priore poſitione peperit errorem in 15. quare ſi ſubducatur, reſtat verus numerus 30. Sic ſublata redundāte differētia, quæ facit exceſſum: veritas ſola relicta ſeſe offert: ſiue exceſſum in ſecunda poſitione, ſiue in priore inueſtigare, atque auferre libet. Atque ita per duas falſas poſitiones, quarũ vtraque plus iuſto conijcit, veritas eruitur, per obſeruationē proportionũ quæ ſunt inter differentias errorũ & differentias poſitionum: adiuuante regula quatuor proportionalium, quorum tria ſunt nota.



12. 4. 3. 1.

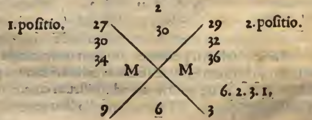
EVNDEM modum per differētiarum obſeruationem res expediatur: etiam ſi vtraque poſitio minus quàm verũ afferat. Veluti ſi ponamus primum mercatorem habuiſſe 27, ſecundm 30, tertium 34: quæ ſummæ collectæ faciunt 91: cum 100 ſint quæſita. Quare poſitio 27 ad ſiniſtrum crucis verticem, error 9 ad ſiniſtrũ pedem, M litera in medio ſinu reponatur. Ite-

p.iiij.

rum tentantes,fingamus primum accepiſſe 29, ſecundum 32, tertiũ 36, quæ ſimul addita faciunt 97.ſic 3 de 100 deſunt. Quare ea omnia à dextra,ſuo quæque loco ſtatuantur,videlicet poſitio ad verticem,error ad pedem, M litera ſinu medio. Deinde quia vtraque coniectura minus attulit, differentias errorum & poſitionum per ſubductionem capiemus.Poſtea conſyderare oportet priorem poſitionem 27,defectum adhuc ignotum in ſe habentẽ,procreaſſe errorem,cui 9 deſunt: & ſecundã poſitionem 29 defectum etiã ignotum habentem, edidiſſe errorem, cui deſunt 3. Quo fit manifeſtũ poſitionum differentiam 2,quæ inter earum vtranque media eſt, peperiſſe errorum differentiam 6,quæ media eſt inter vtrunque errorem. Atque ideo,vt veritatem exquiramus,ſic ratiocinemur, Si 6 differentia errorum naſcitur ex poſitionum differentia 2 veritatẽ intercludente,de qua ſecundæ poſitionis differentia veritatem occultante naſcetur ſecundus error 3? Operare ſecundũ regulã quatuor proportionalium,& inuenies eum naſci ex 1.quod quia ſecũdæ poſitioni defuit,etiam ipſa ſecunda cõiectura minus iuſto protulit.Quapropter vnitas addita veritatem exprimit.

AT SI ſcire voles quantum priori poſitioni defuit, in regula de tribus notis tertio loco quæſtionem de primo errore ſtatue hoc modo, Si errorum differentia 6 venit à 2 differentia poſitionum, de qua falſæ poſitionis differentia veritatẽ in priore poſitione arcente,naſcetur primus error 9?Regulam ducem ſequens deprehẽdes illam fuiſſe 3.Ipſa igitur differentia addita ad primam poſitionem,defectum eius replet.

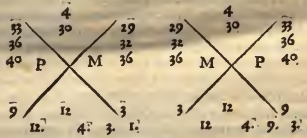
SIC quando per differentiarum obſeruationem veritas inquiritur,ſi vtraque poſitio minus affert: id quod vel primæ coniecturæ vel ſecundæ deeſſe per regulam de tribus notis deprehẽditur,ſuppletur. ſicut quando vtraque poſitio plus profert, id quod ſiue in priore coniectura, ſiue in poſteriore redundantem exceſſum facere per regulam de tribus notis inuenitur, auferendum eſt, vt veritas exprimatur. ſicuti in proximo ſuperiori exemplo videre licuit.



NVNC videamus quomodo per differentiarum obſeruationem res expedietur, quando prior poſitio plus, poſterior minus affert, vel è conuerſo. Et in themate iam dato fingamus primũ mercatorem accepiſſe 33, ſecundũ 36, tertium 40. Ea in vnam ſummã collecta faciunt 109: ex quo liquet 9 redundare. Quare à ſiniſtra crucis, poſitio verticem, error pedẽ, P litera, quæ plus coniectum eſſe demonſtret, ſinũ occupet. Iterúmque tentantes, ponamus primũ mercatorem habuiſſe 29, ſecũdum 32, tertium 36. quæ per additionẽ coaceruata faciunt 97: atque ita 3 de 100 deſunt, ea dextrã teneant: M litera, ad minus indicandũ, in ſinu dextro repoſita. Deinde conſyderare oportet prioris poſitionis exceſſum edidiſſe exceſſum prioris erroris, ſecũdæ autem poſitionis defectum peperiſſe defectũ erroris ſecundi. Quocirca hi duo errores, quia alter in plus, alter in minus peccat, in vnum ſunt addendi, & ſurgent 12: quæ errorũ cumulatio venit ex differentia poſitionum, videlicet 4. Nam quia prior poſitio 9 plura quàm oportuit attulit, ſecunda autem poſitio per 4 tantũ ab ea differens non ſolum exceſſum illũ prioris abſtulit, ſed etiam plus quàm iuſtum erat auferens, defectum ſuperinduxit, ideo tam ad auferendũ prioris poſitionis exceſſum, quàm ad ſupplendũ defectum poſterioris, fit iſta errorum additio: vt per eam temperamẽtum inter exceſſum & defectum inueniatur. Nam ita proportionũ ratio in vtranuis partẽ, ſiue exceſſus, ſiue defectus vim ſuã porrigere poteſt. Etenim ſi in dextram ad defectũ reſpicimus, quæ proportio eſt inter amborum errorum cumulationem & ſecundũ errorem, eadem inter poſitionum differentiam exceſſum & defectũ cumulantem, & illam differentiam quæ in ſecũda poſitione veritatem occultat, eſſe debet. Et permutatim, quæ proportio eſt inter amborum errorũ cumulationem, & poſitionum differentiã exceſſum & defectum cumulantẽ, ex qua naſcitur, eadem inter ſecundum errorem & illam ſecundæ poſitionis differentiam verum abſcondentem, ex qua naſcitur, eſſe debet. Atque eapropter ſi ſcire voles quis ſit numerus qui in ſecunda poſitione defuit, vt iuſtum ſuppleret, conſyderare oportet, ad hunc modum, Si cumulatio errorum quæ eſt 12, naſcitur à poſitionum differentia veritatem occulente, quæ eſt 4, de qua ſecundæ falſæ poſitionis differentia verum abſcondente naſcetur ſecundus error 3? Multiplica 3 in 4, & producentur 12: quæ per 12 ſecta mõſtrant 1, in numero partitionis. Hoc autem additum ad ſecundam poſitionẽ 29, qui numerus vno deficitur, ſupplet id quod

deſuit:& ſiunt 30, qui numerus verus primi mercatoris erat.

AT SI ſcire voles quantum priori poſitioni redundanti detrahendum erat, vt ſolum exceſſum auferret,& iuſtum numerum relinqueret, proportionum ratio à ſiniſtra conſyderanda eſt. nam ſicut amborũ errorum cumulatio ad priorem errorẽ ſe habet, ſic poſitionum differentia ad illam differentiã quæ in priore poſitione veritatẽ occultat, ſe habere debet. Et permutatim, ſicut amborũ errorum cumulatio ſe habet ad differentiam poſitionũ, ex qua naſcitur : ſic prior error ad illã prioris poſitionis differentiam verũ intercludentẽ, ex qua naſcitur, ſe habere debet. Et ideo in operatione facienda per regulam de tribus notis, tertio loco forma quæſtionẽ de primo errore qui plus attulit, perinde quaſi verſo exẽplo, poſitio prior fuiſſet minor,& ſecũda maior, hoc modo, Si 12 cumulatio errorum naſcitur à poſitionũ differentia 4 veritatem præcludente: de qua prioris falſæ poſitionis differentia veritatem abſcondente, naſcetur primus error 9? Ducantur 4 in 9,& creſcent 36: quæ ſecta per 12 in numero partitionis edunt 3: is exceſſus erat, qui primam poſitionem 33 errare fecit. Quocirca dempto illo exceſſu, ſuperſunt 30: qui verus erat primi mercatoris numerus. Itaque quando altera poſitio plus, altera minus affert, ſi per regulam de tribus notis exquiris numerũ qui exceſſum in poſitione fecit, is inuentus ſubducendus eſt. At ſi numerum inquiris qui poſitioni deſuit, is cõpertus ad eam eſt addendus, vt veritas appareat.

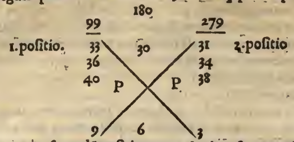


I QVISPIAM ſcire cupit quãdo per differentiarũ obſer
s uationẽ res expeditur, cur ſiue vtraque poſitio, plus ſiue vtraq; minus affert, alterius poſitionis ab altera, atque alterius erroris ab altero ſit ſubductio: Animaduertere debet ad ea quæ dicta ſunt, nempe quòd diſtãtia à veritate, vel appropinquatio ab veritatem, per differentiam alterius poſitionis ab altera, atque alterius erroris ab altero deprehenditur: ipſa autem numero-

rum differentia per ſubductionem inuenitur. Ex proportione autem illarum differentiarum, quæ mediæ ſunt inter errores & poſitiones, veritas inueſtigata per regulam de tribus notis in lucē venit, ſiue in dextram partem, ſiue in ſiniſtram reſpicias. Nam ſi in dextram: quæ proportio eſt inter errorum differentiam & ſecundum errorem qui magis ad veritatem appropinquat, eadem inter poſitionum differentiam quæ differentiam errorum peperit, & illum ſecundæ poſitionis numerū qui veritatem adhuc abſcōdens ſecundum errorem edidit, eſſe debet. Et permutatim, quæ proportio eſt inter errorum differentiam, & differentiam poſitionum genitricem ſuam, eadem inter ſecundum errorem, & ignotum numerum matrem ſuam erit. At ſi in ſiniſtram reſpicias: ſicut errorum differentia ſe habet ad priorem errorem quæ longius à vero recedit, ſic poſitionum differentia ad illam prioris poſitionis latentem differentiam, quæ priorem errorem edidit. Et permutatim, ſicut errorum differentia ſe habet ad differentiam poſitionum, ſic prior error ad illam prioris poſitionis latentem differentiam, quæ ipſam edidit, ſe habere debet. Porrò niſi hæc proportionū ratio in differētijs poſitionum atque errorum ineſſet, nulla vnquam quæſtio per regulas falſarum poſitionū ſolui quouiſmodo poſſet. Succedens autem illa quatuor proportionalium regula, quæ quartum numerum ignotum latere non ſinit, per tres numeros notos ſtatim eum profert, & rem totam explicat.

A T SI ſcire voles cur in regulis pluris & minoris, ſiue vtraque poſitio plus, ſiue vtraque minus affert, prior error ducitur in ſecundā poſitionem, & ſecundus error in poſitionem priorē, poſteáque alterius producti ab altero, & alterius erroris ab altero fit ſubductio: Ratio hui⁹ rei pēdet partim ab his quæ de differentiarū proportione dicta ſunt, partim à prima & ſecūda regula Euclidis libro ſecūdo: quas quanquam ille de lineis poſuit, quia tamen in numeris etiā veræ ſunt, nos de numeris eas demus, ad hunc modū, Si fuerint duo numeri quorum vnus in quotlibet partes diuidatur, illud quod ex ductu alterius in alterū fiet, æquū erit his quæ ex ductu numeri indiuiſi in vnāquanque partē numeri particulatim diuiſi producentur. Itē ſi fuerit numerus in partes diuiſus, illud quod ex ductu totius in ſeipſū fit, æquū erit his quæ producētur ex ductu eiuſdē in omnes ſuas partes. Ita quādo prior error in ſecundam poſitionem ducitur, perinde eſt quaſi differentia errorū & ſecūdus error, qui numeri ſunt partes primi erroris,

ducantur in eãdem ſecundam poſitionem. Veluti in primo exemplo de regulis pluris & minoris dato, vbi vtraque poſitio plus affert,

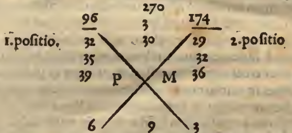


prior error 9 in ſecundã poſitionem 31 ducitur, & procreatur, 279: ſic ſi errorum differentia 6 ſeorſum in 31 ducatur, naſcentur 186: & ſi 3 ſecundus error in 31 ducatur, fient 93: qui numeri producti ambo ſimul additi faciunt 279. Similiter cum differentia poſitionũ 2, & ſecunda poſitio 31 partes ſint primæ poſitionis 33, ducentes ſecundum errorem 3 in primam poſitionem 33, producemus 99: qui numerus productus æqualis eſt numero producendo, ſi ipſe ſecũdus error 3 ſeorſum in poſitionũ differentiam 2, & poſtea in 31 ducatur: ſic quoque ſurgent 99. Itaque cum inter differentiam errorum & ſecundũ errorem ea ſit proportio, quæ eſt inter differentiã poſitionum & exceſſum in ſecunda poſitione: quando multiplicamus differentiam errorum 6 in ſecundam poſitionem 31, facimus 186, & ducimus eam non ſolum in totum verum numerum 30, ſed etiam in exceſſum, qui veritatem abſcõdit, videlicet 1. Et cum multiplicamus ſecundum errorem 3 in ſecundam poſitionem 31, facimus 93: quæ addita ad 186, creant 279. Horum autem vtrunque tacite fecimus ducentes primum errorem in ſecundam poſitionem. Ita 99 ſupra verũ addidimus: quod tantũ eſt quantum capit multiplicario ſecundi erroris 3 in primam poſitionẽ 33. Nam multiplicatio differentiæ errorum 6 in ſecundæ poſitionis exceſſum 1, quæ tacite facta eſt quando duximus 6 in 31, æquiparatur multiplicationi ſecundi erroris 3 in differentiam poſitionum 2. Quia cũ illa quatuor ſint proportionalia, ſicuti ſupradictum eſt: quæ ab extremorum multiplicatione veniunt, æqualia ſunt his quæ à mediorum, per regulam de tribus notis. Et multiplicatio ſecundi erroris 3 in ſecundam poſitionem 31, quæ tacite facta eſt quando duximus primum errorem in ſecundam poſitionem, facit 93: ſic 99 ſupra veritatem ſunt adiecta. Quare ſubductio numeri per multiplicationem ſecundi erroris in primam poſitionem producti, qui etiam

eſt 99, excéſſum omnem à veritate aufert, & numerum verum velut in turba latitantem relinquit: ſed quis ſit, adhuc ignoramus. Diuiſio autem facta per errorum differentiam 6, quiſnam ſit oſtẽdit, videlicet 30. Nam quando aliquis numerus ex duorum multiplicatione producitur, eius diuiſio per alterum facta profert alterum in numero ſectionis. Eadem ratione ſubductio alterius producti ab altero, & alterius erroris ab altero fiet, quãdo vtraque poſitio minus afferet.

QVÒD ſi ſcire deſyderas quando per differentiarum obſeruationem res expeditur, cur errorum ſit additio, ſiue prior poſitio plus, poſterior minus affert, ſiue è conuerſo: Ratio illa eſt, quam cum exempla daremus, attigimus: videlicet quòd ſi contingat priori poſitioni aliquid ſupereſſe, ſecundæ aliquid deeſſe, differentia poſitionum non ſolum exceſſum prioris poſitionis aufert, ſed etiam defectum in ſecunda inducit. Vel ſi eueniat priorem poſitionem defectum afferre, ſecundam exceſſum, tum differẽtia poſitionum non ſolum id quod priori poſitioni deeſt, ſupplet, ſed plus iuſto aggregans, exceſſum in ſecunda poſitione parit. Quocirca ad inueniendum temperamẽtum inter exceſſum & defectum, prior error ex priore poſitione veniens & poſterior exiens ex poſteriore, in vnum coniungũtur: quæ errorum cumulatio inter duos errores media, in vtranuis partem ſiue exceſſus ſiue defectus comparari poteſt. Nam ſi ad defectum reſpicimus, Sicut errorum cumulatio à differentia poſitionum defectum & exceſſum accumulante naſcens ſe habet ad illum errorẽ qui naſcitur ex defectu, ſic poſitionum differẽtia, ad illam falſæ poſitionis latentem differentiam quæ defectum edidit. Et permutatim, ſicut errorum cumulatio ſe habet ad differẽtiam poſitionum, ſic error defectum patiens ad illam differentiam quæ defectum attulit, ſe habere debet. At ſi in alteram partem ad exceſſum reſpicimus, Sicut errorum cumulatio ſe habet ad errorem qui natus eſt ab exceſſu, ſic differentia poſitionum ad illam falſæ poſitionis latẽtem differentiã quæ peperit exceſſum. Et permutatim, ſicut errorum cumulatio ſe habet ad differentiam poſitionum, ſic error ab exceſſu ad illam differentiam quæ exceſſum protulit, ſe habere debet. Atque ideo regula de tribus notis facile quartam illam ignotam ſiue exceſſus ſiue defectus differentiam quæ verum occultat, manifeſtabit. Ea verò cognita ſi exceſſum affert, ſubducenda eſt: ſi defectum, addenda, vt verus numerus exeat.

PORRÒ ſi ſcire voles cur in regulis pluris & minoris, ſiue prior poſitio plus, poſterior minus affert, ſiue è conuerſo, ſemper prior error ducitur in ſecundam poſitionem, & ſecundus error in poſitionem priorem, poſteáque alterius producti ad alterum fit additio, & amborum ſumma per ſummã errorum diuiditur, vt veritas exeat: Ratio tota huius rei pendet partim ab his quæ de ratione proportionũ modo ſunt dicta, ſine quibus huiuſmodi quæſtiones per falſarum poſitionũ regulas explicari nequeunt, partim à prædictis Euclidis regulis prima videlicet & ſecunda, libro ſecundo. Et vt in exemplo verſantibus res magis elu ceat, repetamus illud quod in tertia pluris & minoris regula ſuprà datũ eſt, in quo prior poſitio plus, poſterior minus affert: vbi prior error 6 ductus in ſecundã poſitionem 29, profert 174. ſecundus autẽ error 3 ductus in poſitionẽ priorẽ 32, producit 96: qui numeri producti ambo cõiuncti faciũt 270, quæ ſecta per 9 ꝓferũt 30.



HIC multiplicatio prioris erroris 6 in ſecũdam poſitionem 29, quæ procreat 174, perinde eſt ac ſi ipſe prior error duceretur in veritatem 30, & fierent 180: præterquã quòd tot vnitates multiplicationi prioris erroris in ſecundã poſitionem, deſunt ad æquandam eam veritati, quot multiplicatio prioris erroris in id quod veritati in ſecũda poſitione defuit, addere poteſt. Quocirca quia 1 defuit ſecundæ poſitioni, quod ductũ in 6 crearet 6: ideo numerus productus ex multiplicatione prioris erroris in ſecundã poſitionem 174, per 6 differt à numero qui produceretur ex multiplicatione prioris erroris in veritatem, qui eſſet 180: qui numerus per 6 ſuperat 174. Similiter multiplicatio ſecũdi erroris 3 in priorem poſitionem 32, quæ facit 96, perinde eſt acſi ipſe ſecundus error 3 duceretur in veritatẽ 30, & procrearentur 90: niſi quòd multiplicatio ſecundi erroris in priorem poſitionẽ, per tot vnitates ſuperat multiplicationem ſecundi erroris in veritatem; quot multiplicatio ſecundi erroris in id quod in priore poſitione veritatem excedit,

producere poteſt. Quare cum in priore poſitione exceſſus ſupra veritatem ſit 2, qui ductus in ſecundũ errorem 3, creat 6: ex ea multiplicatione ſecundi erroris in priorẽ poſitionẽ quæ facit 96, 6 plura producuntur quàm procreari deberent ſi ipſe ſecũdus error 3 in veritatẽ 30 fuiſſet ductus, & crearẽtur 90. Illa autẽ 6 quæ hic veritatem excedũt, in priore multiplicatione prioris erroris in ſecũdã poſitionem, veritati defuerũt. Et ita defectus ab exceſſu ſuppletur. Nam quæ proportio eſt inter exceſſum prioris poſitionis 2, & priorem errorẽ ex eo natũ 6, eadem inter defectũ ſecundæ poſitionis 1 & ſecundum errorem ex eo natum 3, omnino erit. Et permutatim, quæ proportio eſt inter exceſſum prioris poſitionis 2, & defectum ſecũdæ poſitionis 1, eadem erit inter priorem errorẽ 6, & ſecundũ errorem 3. Quare cũ ſint 4 numeri proportionales, quæ ab extremorũ multiplicatione producũtur, æqualia ſunt his quæ à mediorum: tantũ enim faciunt bis tria, quantũ ſemel ſex. Quamobrẽ ſi ambo numeri ex obliqua errorum in poſitiones multiplicatione producti cõiungãtur, alter alterius vitiũ ſemper corriget. Atque is cui deeſt, alterius exhauriet exceſſum: & is cui ſupereſt, alteri⁹ ſupplebit defectũ. Qua ratione res ad æqualitatẽ reducetur: & fiẽt 270. Idem autẽ numerus ſimiliter etiã producetur, ſi vterq; errorũ ſeorſum in veritatẽ 30 ducatur. Nam 6 in 30 ducta creant 180: & 3 in 30 ducta cõponunt 90: quæ ſimul addita faciunt etiã 270. Quamobrẽ cum ſumma productorũ ex obliqua errorũ in poſitiones multiplicatione, ſit æqualis ſummæ productorũ ex vtriuſque ſeorſum erroris in veritatẽ ductu, Eáque multiplicatio vtriuſque ſeorſum erroris in veritatẽ, æqualis ſit amborũ errorum ſimul additorũ ſummæ in veritatẽ ductæ, per prædictã Euclidis primã regulã ſecũdi: Neceſſe eſt, ſi ipſa errorũ ſumma cumulata quæ eſt 9, ſummã productorũ ex obliqua errorũ in poſitiones multiplicatione videlicet 270 diuidat, ipſa veritas 30 in numero ſectionis in lucẽ prodeat. Nã quãdo numer⁹ aliquis ex duorũ multiplicatione ꝓducit, idémque per eorũ alterũ diuidit, in numero partitionis alter apparebit.

EXPEDITIS falſarum poſitionum regulis, quo magis ſtudioſi in eis exerceantur, quæſtiones aliquot, quæ per eas ſolui poſſunt, hic ſubijciemus.

SOCII tres habuerunt communes aureos 44, quorũ ſecundus bis tantũ quantum primus, atque eo amplius aureos 4 cõtulit: tertius quantũ ambo reliqui, atque eo amplius aureos 6: quæro, quantũ ab vnoquoque collatũ eſt? Experire

per datas regulas:& comperies primum contuliſſe aureos 5,ſecundum 14,tertium 25.

TRES panni telæ aureis 250 ſunt emptæ: quarum ſecunda bis tanti,quanti prima conſtitit,atque eo pluris aureis 10: tertia bis tanti, quanti aliæ duæ,atque eo pluris aureo vno:quæro,quanti tela quæque conſtitit? Tenta per datas regulas, & inuenies primam aureis 24 $\frac{1}{3}$ emptam eſſe,ſecundã aureis 58 $\frac{2}{3}$, tertiam aureis 167.

OBSONATOR quiſpiam emit in cœnam domini gallinas 3,perdices 4,phaſianos 5,nummis 86:perdix quiſque nummis 3 pluris quàm gallina conſtitit : phaſianus quiſque nummis 7 pluris quàm perdix:quæro, quanti quæque auis empta eſt? Tentans per datas regulas comperies gallinam quanque nummis 2 , perdicem quenque nummis 5 , phaſianum quenque nummis 12 conſtitiſſe.

CUBITI 6 panni rubri, & 4 panni viridis valẽt aureos 36. Eodem pretio cubiti 9 panni rubri,& 7 panni viridis valent aureos 57: quæro, quanti cubitus quiſque vtriuſque panni conſtitit? Pone quo pretio libet 6 cubitos panni rubri & 4 panni viridis fuiſſe emptos, dummodo de ambobus coloribus omnium cubitorum pretium 36 efficiat.Deinde vide ſi 9 cubiti panni rubri & 7 panni viridis eodem pretio emantur, quantũ vel deerit,vel ſupererit de 57:& errore notato,iterum ad eundem modũ ponens perge. Ita deprehendes per datas regulas panni rubri cubitum aureos 4 valere,cubitum autem viridis aureos 3.

GALLINAE 3, perdices 4, phaſiani 5 valent nummis 72. Eodẽ pretio gallinæ 3,perdices 5, & phaſiani 7 valent nũmis 94 $\frac{2}{3}$:quæro, quãti conſtitit vnaquæque auis? Regulas duces ſequens comperies gallinã emptam eſſe nummo 1 $\frac{1}{3}$,perdicem nummis 5 $\frac{1}{3}$,phaſianum nummis 9 $\frac{1}{3}$.

MINISTER cui tradita à domino nummorũ ſumma,mandatum erat vt quendam tritici modiorum numerũ emeret:in mercatũ profectus ſingulos tritici modios denis nũmis licetur:qua ratione de ſumma accepta nummos 40 ſibi ſuperfuturos deprehẽdit. at tritici venditor duodenis nũmis ſingulos modios indicat:quod pretiũ miniſter ſoluere recuſat,quòd ea ratione cõperiet ſibi defuturos nũmos 40:quæritur,quis erat modiorum numerus, quẽ emi dominus iuſſit? & quis nũmorũ numerus ad id traditus erat? Si modiorũ numerus eſſet cognitus,ſimul etiã

nummorum numerus ſciretur. Ideo vt exquiras quot modij tritici fuerunt, inueſtigandus eſt numerus qui in 10 ductus additis 40 tantum producat, quantũ in 12 multiplicatus, ſubductis 40. Is inuentus modiorum numerum monſtrabit: quem vt exquiras, pone fuiſſe modios 36: quorũ ſi ſinguli conſtarent nummis denis, fierẽt 360: his adde nummos 40 qui ſupereſſent, & ſurgent 400 pro ſumma miniſtro data. Poſtea videamus an venditoris indicatura cum his quadret. Is in ſingulos modios nummos 12 poſcit: qua ratione modij 36 conſtarent nummis 432: à quibus ſi 40 ſubducantur qui ad pretium illud explendum defuerunt, reſtabunt 392: ſic 8 deſunt, vt fiant 400 pro ſumma miniſtro data. Atque ita poſitio modiorum 36 defectum in 8 profert. Quare iterum ponamus fuiſſe modios 38: quorum ſi ſinguli denis conſtarent nummis, fierent 380, quibus addamus 40 quæ ſupereſſent, & fient 420 pro ſumma miniſtro data. Deinde videamus an venditoris indicatura de 12 nummis in ſingulos modios 38 quadret: nam ſic fierent nummi 456. à quibus ſi 40 pro his qui ad explendum pretium defuerunt, ſubducas, relinquentur 416. Ita deſunt 4, vt fiant 420 pro ſumma miniſtro data. Sic vtraque poſitio & de 36 & de 38 falſa eſt. Ex quibus ſi veritatem per regulas ſuprà datas inueſtigare libet, inuenies modiorum numerum, quem dominus emi voluit, eſſe 40, & nummorum numerum miniſtro datum 4400: in quibus numeris emptoris licitatio cum venditoris indicatura quadrabit.

ALIO modo per compendium quæſtio hæc, atque aliæ huiuſmodi ſolui poſſunt, vt numerũ qui ſuperfuiſſet, & numerum qui defuiſſet, in vnam ſummam addas. Deinde pretium licitantis miniſtri quod minus eſt, à pretio maiore venditoris indicantis ſubducito: & per pretiorum differentiam quæ reſtat, illam ſummam nummorum qui ſuperfuiſſent, & qui defuiſſent, diuide: ſic in numero ſectionis exibit modiorum numerus, qui cætera omnia aperiet: id quod in ſequenti quæſtione licebit etiam videre.

OPERARII à patrefamilias ad putandam vineam in vnũ diem conducti mercedem operarũ petunt, ſinguli nũmos quinos: ille cauſatus ante veſperam ab opere eos ceſſaſſe, ſolum ternos offert, quibus ſi contenti eſſent, excuſſis loculis, deprehendit ſibi ſuperfuturos nummos 7. At ſi quini ſoluendi eſſent, defuturos 13. Libet inueſtigare quot operarios habuit, & quot nummos. Vt nodum hunc atque huiuſmodi per compendiũ ſoluas, addere oportet nũmos 7 qui ſuperfuiſſent, ad nummos 13 qui

defuiſſent:& ſurgent 20:qui numerus ſecandus eſt. Deinde ſubdu cere oportet mercedē minorem oblatam à maiore flagitata, videlicet 3 à 5,& reſtabunt 2:qui numerus diuiſor erit. Ita 20 per 2 ſecta in numero partitionis decē proferent. Tot operarij vineam putarunt. Nummorū enim numerus qui ſuperfuiſſet, ad numerum additus qui defuiſſet, diuidēdus eſt per mercedis petitæ & oblatæ differentiam, vt numerus ſectionis monſtret quot mercedē petūt. Poſtea facile ſcitu eſt quot nūmos paterfamilias habuit. Nam mercedis oblatæ numerus in numerum operariorū ductus id aperiet. Itaque 3 in 10 ducta procreabunt 30: quibus ſi 7 addas, prodibunt 37: is nummorū numerus patrifamiliâs in loculis erat. Præterea ſi operarius quiſque 5 in mercedē exegiſſet, operarij decē neceſſe eſt habuiſſent 50: à quibus ſi 13 qui defuerunt, ſubducas, ſupererūt 37.

POTES etiam rem explicare, ſi per falſas poſitiones numerum exquiras, qui in 3 multiplicatus, additis 7 tantum producat, quātum ſi in 5 ducatur, ſubductis 13. Is inuentus operariorum numerum indicabit, qui cætera omnia aperiet.

DVO AVREOS habētes, æqualem quiſque numerum, ad emendū pannū in mercatum vadunt. Alter 13 panni cubitos emit, cui ſuperfuerūt aurei 15. Alter eodē pretio pāni cubitos emit 20: cui defuerunt aurei 28, in quibus remanſit debitor. quæro, quanti conſtitit panni cubitus quiſque, & quantum eorū vterque in crumena habuit? Potes per coniecturas falſas rem explicare, ſi numerū per eas inueſtiges, qui in 13 ductus additis 15 tantum producat, quantū in 20 multiplicatus, ſubductis 28. Vel ſi mauis, per compēdium ſuprà datum rem aggredi licet: & vtroque modo deprehendes vnius cubiti pretium fuiſſe $6\frac{1}{7}$: vtrunque autem ſeorſum in crumena habuiſſe aureos $94\frac{6}{7}$.

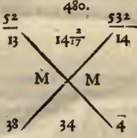
MERCATOR panni linei telam empturus, ratione facta, cōperit, ſi ſingulos cubitos nummis 8 emat, ſibi ſuperfuturos nummos 50. At ſi 10 nummis cubiti ſinguli conſtent: defuturos nummos 80: quæro, quot cubitos tela capiebat? & quantum illi in loculis erat? Si per falſas poſitiones rem tentas, per eas inueſtigandus eſt numerus, qui in octo ductus, additis quinquaginta tantum producat, quantum in decem multiplicatus, ſubductis octoginta. Qua ratione inuenies telā cubitos ſexaginta quinque longam fuiſſe, nummóſque in loculis eum habuiſſe 570. Potes etiam per compendium datum continuo rem explicare.

VOMERCATORES nauē lanis onerandam cōducunt.
D alter in eam ſaccos lanæ ſeptē, alter lanæ ſaccos vndecim impoſuit: eorū vterque ſeorſum pro ſe ſaccum vnū magiſtro nauis traditum vēdi, déque pretio naulum ſolui, & ſiquid ſupereſſet, reddi mandauit. Quod cum expleta nauigatione factū eſſet, magiſter nauis ei qui ſeptē ſaccos impoſuerat, aureos quinquaginta reddidit: ei verò qui vndecim ſaccos, aureos 20. quæritur, quantū cuiuſque ſacci naulū erat, & quāti magiſter nauis traditū ſaccum vendidit? Per poſitiones inueſtigandus eſt numerus, qui in 7 multiplicatus, additis quinquaginta tantum producat, quantum in 11 ductus, additis 20: qui cum inuentus fuerit, monſtrabit ſacci cuiuſque naulum fuiſſe aureos $7\frac{1}{2}$: ſaccum autem illum magiſtro nauis traditum, aureis $102\frac{1}{2}$ venditum fuiſſe.

VI SACCARI libras ſex emerat, interrogatus de vnius
Q libræ pretio, reſpōdit, Quanti libræ ſex pluris decem nūmis conſtiterunt, tanti libræ 10 pluris 20 nummis ſunt emptæ. Quæritur, quodnam pretium eſt vnius libræ? Ad hanc quæſtionem explicandam, per poſitiones inquirēdus eſt numerus, qui in ſex multiplicatus tantum ſupra decem producat, quantū in decem ductus ſupra 20 proferret. Is autem inuētus vnius libræ pretium indicabit $2\frac{1}{2}$. Vel ſi mauis, ad huius generis ænigmata ſoluēda, compendium ſequi licet ad hunc modum, Minimum numerum à medio ſubducere oportet, & quatuor reſtabunt: qui numerus diuiſor erit. Deinde medium numerum à maximo ſubtrahere eſt opus: & decem remanebunt. Ea per diuiſorem ſecta libram vnā nummis $2\frac{1}{2}$ eſſe venditā, in numero partitionis monſtrabunt. In tribus nanque his numeris 6, 10, 20, duæ ſunt differentiæ, ſiue duo exceſſus, quorum minor in hoc quæſito maiorem ſecare debet. Poſtquam autem habes vnius libræ pretium, reſponſi ænigma in lucem venit. Nam ſi libræ ſex in vnius libræ pretium ducas, procreantur nummi 15. Atque iterum ſi libras decem per vnius libræ pretium multiplices, ſurgent nummi 25. Ita numerus hic 5 æqualiter ſuperat & 10 nummos & 20.

RCHITECTVS qui intra 30 dies ædes reficiendas ſuſce-
A pit, cum earum domino vehementer vrgente, vt operi inſtaret, pepigit vt in ſingulos dies quibus operaretur, mercedem acciperet nūmos 18: at ſiquos dies ceſſaret, pro ſingulis redderet domino nummos 16. Is tot diebus ædibus reficiendis operam dedit, & tot diebus ceſſauit, vt facta ratione nihil ei reſtaret:

quæro quot diebus operatus eſt,& quot diebus ceſſauit? Pactũ bene conſyderans cõperies de 30 partes 2 exquirendas eſſe, quarũ altera ducta in 18 tantum producat, quantum altera in 16 : id quod per poſitiones fortuitas facile inueſtigabis, ſi ſub 30 numerũ dierum quibus operatus eſt conijcias,eúmque in 18 ducas:deinde reliquam partem de 30 multiplices in 16 pro ceſſationis diebus. Poſtea vide vter numerus productus altero maior erit. Si numerus pro diebus ceſſationis productus alterũ ſuperat, poſitio de operis diebus defectum oſtentat. At ſi numerus productus ex operum diebus maior eſt,poſitio in exceſſu peccat. Vtruncunque autem euenerit,annotandum erit: & iterum tentanda poſitio. Sequens itaque regulas datas comperies dies quibus operatus eſt, eſſe $14\frac{2}{17}$. reliquos verò vſque ad 30 quibus ceſſauit,eſſe $15\frac{15}{17}$.



INTERROGATVS quiſpiam quotam horam index horologij mõſtraret,reſpondit, Tertia & quarta pars horarũ quas indicat,ſunt quinta & ſexta pars earum quas indicare deberet. quotam horam index monſtrabat? & quotam monſtrare debebat? Priuſquam reſpondes,animaduertere oportet morem regionis in qua eſt horologiũ. Eſto,fuerit in Italia,in qua horarum ſupputatio per diẽ & noctem progreditur vſque ad 24. Vt ænigma hoc ſoluas, per poſitiones duæ partes de 24 ſunt inueſtigandæ, quarum $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{4}$ vnius, ſint $\frac{1}{5}$ & $\frac{1}{6}$ alterius. Ita inuenies horas ab horologio monſtratas eſſe $9\frac{5}{19}$. eas verò quæ debuiſſent monſtrari,eſſe $14\frac{14}{19}$. Quippe de $9\frac{5}{19}$ tertia pars eſt $3\frac{5}{57}$, Quarta $2\frac{6}{19}$. quæ partes ambæ ſimul additæ faciũt $5\frac{437}{1083}$. At de $14\frac{14}{19}$ quinta pars eſt $2\frac{18}{19}$, ſexta $2\frac{26}{57}$. quæ etiam partes ambæ ſimul additæ creant $5\frac{437}{1083}$.

AVREI ducẽti inter duos aleatores æquis portionibus diuidi debuerunt, vt eorum vterque 100 deportaret. Effuſis è ſacco aureis, cũ rixa inter eos orta eſſet, iniectis vterque

manibus aceruum deripiunt:de quo alter plus,alter minus ſuſtulit. Demum ſedata rixa,conuentum eſt vt qui plus rapuiſſet,dimidium deponeret:qui minus,partem tertiam: quæ ſummæ depoſitæ,quum æquis partibus inter eos diuiſæ fuiſſent,vterque ſe comperit habere aureos 100, quẽadmodum ab initio partitio fieri debuit:quæro,quantum vterque rapuit? Per poſitiones inuenies alterum aureos octoginta quinque & $\frac{5}{7}$:alterum aureos centũ quatuordecim & $\frac{2}{7}$ rapuiſſe:quæ ſummæ compoſitæ faciunt 200.

TRIBVS aleatoribus primus de pecunia ſecũdi dimidiũ
E lucratus eſt:ſecundus de tertij pecunia partẽ tertiam: tertius de primi pecunia partem quintam:luſúque finito,diſcedens eorum quiſque centum aureos deportauit: quæro,quantũ quilibet initio luſus attulit? Tentans per poſitiones cõperies primum attuliſſe aureos quinquaginta quinque & $\frac{5}{9}$. Secũdum aureos 111 $\frac{1}{9}$. Tertium 133$\frac{3}{9}$. Nam primus de ſua pecunia quintã partem perdidit,videlicet 11$\frac{1}{9}$: quo factum eſt vt ei reſtarent quadraginta quatuor & $\frac{4}{9}$:quibus dimidium de ſecundi pecunia acceſſit, nempe quinquaginta quinque & $\frac{5}{9}$:ita centum deportauit. Secundus de ſua pecunia dimidium perdidit,& de tertij pecunia partem tertiã lucratus eſt, videlicet quadraginta quatuor & $\frac{4}{9}$: quæ ſi addas ad alterum dimidiũ quod remanſit,ſurgent etiam centũ. Tertius de tertia parte pecuniæ ſuæ iacturam fecit. ſic ei remanſerunt octogintaocto & $\frac{8}{9}$: quibus ſi quintam partem de primi pecunia lucrifactam,videlicet 11$\frac{1}{9}$,adiungas,fient etiam illi centum.

VO VIATORES Cornelius & Antonius in itinere cru-
D menas duas,alterã rubram,alteram nigrã,ſubinde repererunt,in quarũ altera aurei 10 plures quàm in altera fuerũt, atque in ambabus aurei centũ. Cornelius ſecum ſupputãs,ad Antonium inquit, Si tu mihi crumenam rubram dabis, & aureos decem de tuis, tum ego tuæ pecuniæ quadruplum ſum habiturus. Reſpondit Antonius, At ſi tu mihi dabis crumenã nigram, & de tuis aureos viginti, tum ego tuæ pecuniæ quintuplũ ſum habiturus:quæritur,quot aurei in rubra crumena,quot in nigra fuerunt, & quot aureos Cornelius de ſuis,quótque Antonius habuit? Principio de centũ duas partes facere oportet, quarũ altera ſuperet alteram partibus decẽ:hæ ſunt quinquaginta quinque,& 45. Deinde viatorũ vtriuſque aureos per poſitiones exquiſiturus, finge eorum vtrũque numerũ quemlibet habere, aſſignans etiam eis vt libet crumenas: annotáque errorẽ. Cæterum prius quàm ad ſecun-

dam poſitionem pergis, crumenarum aſſignationem (ſeruata ipſa eadem poſitione) commuta, obſeruáque vtra earum aſſignatio minorem errorē parit, vt illam reiecta altera, etiam in ſecūda poſitione teneas. ita ſcies vter crumenā rubram vter nigrā habuit. Poſtea ad ſecundam poſitionē accingere, & regulas datas ſequens deprehendes Cornelium de ſuis habuiſſe aureos $40\frac{5}{19}$. Antonium $36\frac{6}{19}$: atque in crumena rubra fuiſſe aureos 55, in nigra 45.

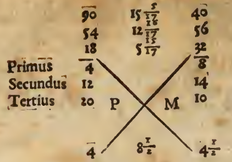
MILES qui in ſtatione erat, à viatore interrogatus quot in præſidio eſſent, reſpondit, Si totidem alij accederent, dimidium de totidem, & quarta pars de totidem, omnes vnà tecum faceremus 100. Iuuat ſcire quot milites eſſent in præſidio. Tenta per poſitiones, & inuenies fuiſſe triginta ſex.

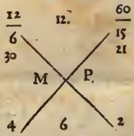
MERCATOR ad trinas nundinas ſubinde profectus, primis omnem ſuam pecuniam per lucrū duplicauit: & inſumpſit libras auri duodecim. Secundis id quod ex primis ſuperfuit, per lucrū duplicauit, & iterū inſumpſit libras auri duodecim. Tertijs id quod ex ſecundis remanſit, per lucrum duplicauit, & rurſus inſumpſit auri libras 12. quo factum eſt, vt nihil omnino ei reſtaret. Quæritur, quantū pecuniæ ad primas nundinas ab initio ſecum extulit? Tenta per poſitiones, & cōperies eum extuliſſe auri libras $10\frac{1}{2}$. Licet etiam ſine vlla poſitione quæſitū hoc explicare, ſi à poſtremis nundinis incipiens, colligénſque per ſingulas lucra quæque, & ſubducens impenſas, ordine retrogrado ad primas nundinas pergas. quemadmodum de ſacerdote tribus mēdicis pecuniam erogante libro tertio monſtrauimus.

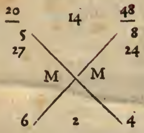
TRES pecuniam habent, aureorū quiſque ſummam, quorum primus alijs duobus inquit, Si mihi dimidium pecuniæ veſtræ cōtuleritis, habebo vnà cum mea pecunia aureos 20. Secūdus verò cæteris dicit, Si mihi partē tertiam pecuniæ veſtræ donaueritis, habebo vnà cum mea aureos 20. Tertius quoque reliquis affirmat, ſi mihi partē quartam pecuniæ veſtræ dederitis, habebo vnà cū mea aureos 20. Quæro, quot aureos habet eorum vnuſquiſque? Pone vt libet, puta primum habere aureos 4: alij (neceſſe eſt) habeant in ſumma 32: quorū $\frac{1}{2}$ primo data faciet illi aureos 20. Iam verò, vt ſeorſum exquiras ſecūdi & tertij partes, poſitiones alias facere oportet, ad hunc modum, Adde ſimul omnium partes prima poſitione coniectas, & fient 36. Deinde vt partem ſecundi exquiras, inueſtigare oportet de 36 partes duas, quarū alteri pars tertia alterius iuncta faciat 20: id quod obiter per alias

poſitiones faciendum eſt,& earum alteram inuenies 12. tantũ habebit ſecũdus. Sic primus & tertius habebunt 24, é quibus 4 ſunt primi, ſicut eſt poſitum, 20 erunt tertij. Sic ſecundum thema partes primi & ſecundi congruunt: cæterum tertij pars per hanc poſitionem erit 24: quippe ſi primus & ſecundus $\frac{1}{4}$ ei cõferant, ea erit 4. at ipſe habet 20. ſic fiunt 24,& 4 excedentes in prima hac poſitione redundant. Iterum igitur pone vt libet, puta primum habere 8, quo fiet vt ſecundus & tertius habeant 24, quorum $\frac{1}{2}$ faciet ei qui primus eſt 20. Et vt partem ſecundi inuenias, adde ea omnia ſimul, & fient 32. poſtea per alias poſitiones obiter inueſtigare oportet de 32 partes duas, quarum alteri pars tertia alterius iuncta faciat 20. Et inuenies alteram eſſe 14. Tantum habebit ſecundus in ſecunda hac poſitione, in qua primus habet 8: primus verò & tertius habebunt 18: quorum $\frac{1}{3}$ ſecũdo collata faciet ei 20. Si primus & ſecundus habent 22, quorum $\frac{1}{4}$ eſt $5\frac{1}{2}$: quæ addita ad 10 faciũt $15\frac{1}{2}$: qua ratione deſunt $4\frac{1}{2}$, vt fiant 20: atque ita ſecunda poſitio defectum parit. Quocirca vt inter has duas falſas poſitiones, quarum prior exceſſum, ſecunda defectum profert, veritas inueniatur, adde ambos errores, videlicet 4 & $4\frac{1}{2}$ & ſurgent $8\frac{1}{2}$: qui numerus diuiſor erit. Deinde primus error 4 ducatur in ſecundam poſitionem 8,& producentur 32. Item ſecũdus error $4\frac{1}{2}$ ducatur in priorem poſitionem 4,& fient 18: ea addita ad 32, creant 50: quæ ſumma ſi ſecetur per $8\frac{1}{2}$, in numero partitionis prodibunt $5\frac{15}{17}$. tantum habuit primus. Iterum pro ſecundi parte exquirẽda, ducatur prior error 4 in ſecundam poſitionem 14,& creſcent 56. Itidem ſecundus error $4\frac{1}{2}$ in priorem poſitionem 12,& fient 54: quæ addita ad 56, creant 110: ea ſi ſecẽtur per $8\frac{1}{2}$, in numero partitionis exeunt $12\frac{16}{17}$: tantum habuit ſecundus. Rurſus pro tertij parte inueſtiganda, ducatur prior error 4 in ſecundam poſitionem 10,& fient 40. Similiter ſecundus error $4\frac{1}{2}$ in priorem poſitionem 20, & fient 90: quæ addita ad 40, creant 130. Ea ſi per $8\frac{1}{2}$ diuidantur, in numero ſectionis prodibunt $15\frac{5}{17}$: tantum habuit tertius. Experire ſecundum thema,& ita eſſe comperies.

Huiuſmodi poſitiones duplices vocantur, quòd ad confirmandas præcipuas poſitiones, aliæ obiter fiant, quas ſpectandas oculis hic ſubiecimus, vt lector melius intelligat,







IN SVMMA, per falſarum poſitionum regulas vniuerſæ quæſtiones quæ in negotiationibus interuenire ſolent, facile explicantur. Quæ verò radicum ſupputationem, aut quadraturas requirunt, altiorem poſcunt artem, quam Arabes Algebram vocant. Ea mõſtrat radicum quadratarum cubicarúmque additionẽ, ſubductionem, multiplicationẽ, & diuiſionem: per quā vniuerſa quantunuis ardua, quæ ad numeros attinent, poſſunt expediri. Cæterum nos tãtum ea quæ ad vitam communem tranſigendam neceſſaria ſunt, ſtudioſis explicandā ſuſcepimus.

Algebra

APPENDIX EX BVDAEI LIBRO DE ASSE EXCERpta,in qua priſca Latinorum & Græcorum ſupputatio,ad æſtimationem pecuniæ tum Gallicæ,tum Anglicæ reuocatur.

OPERAE PRETIVM eſſe putauimus noſtrates ſtudioſos admonere,quemadmodum priſca vel Romana vel Græca numiſmata,eorúmque ſummæ quælibet pecunia noſtrate poſſint æſtimari: vt cum veteres authores in manus legendos ſumunt, ſiqua pecuniæ ſumma interuenit,eius æſtimationem protinus agnoſcăt. Id quod Budæus vir cum primis ætatis noſtræ eruditus in eo libro quē de Aſſe & partibus eius mira induſtria cōpoſuit,de pecunia Gallica ſuam gentē admonuit. Quo nomine nō tătum Gallorum, ſed omnium nationum poſteritas ei plurimum debet,quòd priſcorum theſauros refractis barbariei vinculis,quibus concluſi erant,aperuerit. Itaque quibus pecunia Gallica nota eſt,ſatis ab illo ſunt edocti quanti vetera quæque numiſmata, atque eorum ſummæ quælibet occurrentes æſtimentur. Noſtrates verò,quibus ea ignota eſt, per quædam quæ ex illius libro excerpta hic ſubnotauimus,facile idem cognoſcent.

APVD Romanos,dum floreret imperium, auri libra nummos aureos quadragenos octonos capiebat, quorum ſinguli valebant denarios vicenos quinos. Ex his aurei quatuor vnciam pendebăt: poſtea partim luxu,partim bellis ciuilibus,extenuatis opibus,imminuti ſunt aurei,vt tertia pars ponderi decederet,& ſeptuaginta duo ex auri libra fierent. Hi ſolidi vocari cœpti ſunt, quaſi integri, quibus nihil deeſſet. ſolidum enim antiqui integrum vocabant. Atque ſextulæ etiam nuncupati ſunt, quòd eorum ſex vnciam complerent. Nunc, quod ſciam, nuſquam gentium illorum aureorum inſtar aliquod manet,niſi apud noſtrates Anglos,quorum aurei quatuor,quos Nobiles Roſatos vulgo vocant,pendent vnciam: qui veteres aureos Romanos & pondere æquant, & auri probitate parum aut nihil cedunt. Item ſex noſtrates aurei, quos Nobiles Angelos appellamus complent vnciam: & veteres ſolidos,qui ſextulæ nuncupati fuerunt,& pōdere & indicatura æquiparant. Porrò Romani nummariam argenti libram centum denarios argenteos,quorum ſinguli drachmæ pondus æquabant,complecti voluerunt. Denarius apud eos dictus,quòd denos æreos aſſes valeret, vt inquit Varro. Huius dimidium Quinarius argenteus valebat æreos aſſes quinque. at nummus Seſtertius argenteus

duos aſſes & ſemiſſem, dictus quaſi ſemis tertius. Horum quatuor denarium valebant. quo fit vt quadringenti ſeſtertij denarios centum, hoc eſt libram nummariam valerent. Qua ratione Seſtertium neutro genere, quod duas argenti libras & ſemiſſem complectebatur, mille ſeſtertios genere maſculino capiebat. Seſtertius autem ipſe nummus æris duas libras & ſelibram complectebatur, hoc eſt duos aſſes & ſemiſſem. Nam As, æris libram duodecim vncias cõplectentem valebat. Sextans numiſma paruum valebat duos aſſes. Quadrans nummus æreus quartam aſſis partem, vt Triens tertiã. Semis autem duos valebat quadrantes. Huic nummariæ rationi, quod ad denarios, quinarios, & ſeſtertios attinet, vetus pecunia noſtra, quam Sterlingam vocamus, per omnia ſimilis eſt. Quod enim veterem Groſſum Sterlingum noſtrate lingua dicimus, id pondere & indicatura denarium Romanum æquat. Quod veterem Semigroſſum vocamus, Quinarium. Quod noſtratium vulgus veterem denarium Sterlingum appellat, ſeſtertium nummum æquiparat. Cæterum nos libram Sterlingam vocamus, quod apud Romanos libræ dimidium, ſelibra erat. At quod Romani neutro genere Seſtertium vocabant, duas argẽti libras & ſemiſſem complectens, nos quinque libras vocamus, quòd libræ noſtræ ſint ſelibræ Romanæ.

ILLVD obſeruandum videtur, veteres Seſtertium, quod duas libras & ſemiſſem caperet, per duo L & vnum S notare ſolere, ad hunc modum LLS: ſiue de ſeſtertijs nummis, ſiue de alijs ſeſtertijs intelligas. Id quod adhuc extantes libri veteres teſtantur.

Seſtertium neutri generis. Viginti quinque aurei coronati. Quinque libræ ſterlingæ.
Decem ſeſtertia. Ducenti quinquaginta coronati. Quinquaginta libræ ſterlingæ.
Viginti ſeſtertia. Quingenti coronati. Centum libræ ſterlingæ.
Triginta ſeſtertia. Septingenti & quinquaginta coronati. Cẽtum & quinquaginta libræ ſterlingæ.
Quadraginta ſeſtertia. Mille coronati. Ducentæ libræ ſterlingæ.
Quinquaginta ſeſtertia. Mille ducenti quinquaginta coronati. Ducentæ quinquaginta libræ ſterlingæ.
Centum ſeſtertia. Duo millia & quingenti coronati. Quingentæ libræ ſterlingæ.

Ducēta ſeſtertia. Quincꝫ millia coronatorū. Mille libræ ſterlingæ.
Quadringenta ſeſtertia. Decem millia coronatorū. Duo millia librarum ſterlingarum.
Quingenta ſeſtertia. Duodecim millia & quingēti coronati. Duo millia & quingentæ libræ ſterlingæ.
Sexcenta ſeſtertia. Quindecim millia coronatorum. Tria millia librarum ſterlingarum.
Octingenta ſeſtertia. Viginti millia coronatorum. Quatuor millia librarum ſterlingarum.
Mille ſeſtertia. Viginti quinque millia coronatorū. Quinque millia librarum ſterlingarum.

¶Decies ſeſtertiûm Romani quodā ſermonis compendio dicebāt pro decies centena millia ſeſtertiorum. quo ſignificabant idē quod mille ſeſtertia. & ferè ſupra mille per aduerbia loquebantur: infra mille, nunquam.

Duodecies ſeſtertiûm. Triginta millia coronatorum. Sex millia librarum ſterlingarum.
Quindecies ſeſtertiûm. Triginta ſeptem millia & quingenti coronati. Septem millia & quingentæ libræ ſterlingæ.
Vicies ſeſtertiûm. Quinquaginta millia coronatorū. Decem millia librarum ſterlingarum.
Tricies ſeſtertiûm, Septuaginta quinque millia coronatorū. Quindecim millia librarum ſterlingarum.
Quadragies ſeſtertiûm. Centum millia coronatorum. Viginti millia librarum ſterlingarum.
Sexagies ſeſtertiûm. Centum quinquaginta millia coronatorum. Triginta millia librarum ſterlingarum.
Octogies ſeſtertiûm. Ducenta millia coronatorum. Quadraginta millia librarum ſterlingarum.
Centies ſeſtertiûm. Ducenta quinquaginta millia coronatorum. Quinquaginta millia librarum ſterlingarum.
Ducenties ſeſtertiûm. Quingenta millia coronatorum. Centū millia librarum ſterlingarum.
Quadringenties ſeſtertiûm. Decies centena millia coronatorum. Ducenta millia librarum ſterlingarum.
Quingenties ſeſtertiûm. Duodecies centena quinquaginta millia coronatorū. Ducēta quinquaginta millia librarū ſterlingarum.
Octingenties ſeſtertiûm. Vicies centena millia coronatorum. Quadringenta millia librarum ſterlingarum.

Millies ſeſtertiûm. Vicies quinquies, centena millia coronatorum. Quingenta millia librarum ſterlingarum.

Bis millies ſeſtertiûm. Quinquagies centena millia coronatorum. Decies centena millia librarum ſterlingarum, ſiue millies millenæ libræ.

Ter millies ſeſtertiûm. Septuagies quinquies centena millia coronatorum. Quindecies centena millia librarum ſterlingarum.

Quater millies ſeſtertiûm. Centies centena millia coronatorum. Vicies centena millia, hoc eſt, bis millena millia librarum ſterlingarum.

Sexies millies ſeſtertiûm. Centies quinquagies centena millia coronatorum. Tricies centena millia, hoc eſt, ter millena millia librarum ſterlingarum.

Octies millies ſeſtertiûm Ducẽties cẽtena millia coro. Quadragies cẽtena millia, hoc eſt, quater millena millia librarũ ſterlingarũ.

Decies millies ſeſtertiûm. Ducenties quinquagies centena millia coronatorũ. Quinquagies centena millia, hoc eſt, quinquies millena millia librarum ſterlingarum.

Vicies millies ſeſtertium. Quingenties cẽtena millia coronatorum. Centies centena millia, hoc eſt, decies millena millia librarũ ſterlingarum.

Quadragies millies ſeſtertium. Millies centena millia coronatorũ. Ducenties centena millia, hoc eſt, vicies millena millia librarum ſterlingarum.

GRAECORVM SVPPVTATIO.

MINA APVD Græcos idem eſt quod libra & põdo apud Romanos. hæc centum drachmas continebat, hoc eſt centũ denarios romanos, ſiue quadringẽtos ſeſtertios. Drachma enim & denarius paris erant æſtimationis. Mina decem coronatos valebat, ſiue duas libras ſterlingas. Drachma in ſex obolos diuidebatur, atque in trientes, quadrantéſque. Seſquiobolus Athenis, erat Romæ ſeſtertius.

TALENTVM multiplex fuit, ſed Atticum maxime ab hiſtoricis celebratum, ſexaginta libras ſiue minas valuit, hoc eſt, ſexcẽtos coronatos, ſiue centum viginti libras ſterlingas.

Decem talenta. Sex millia coronatorum. Mille & ducentæ libræ ſterlingæ.

Viginti talenta. Duodecim millia coronatorũ. Duo millia & quadringentæ libræ ſterlingæ.
Quadraginta talenta. Viginti quatuor millia coronatorum. Quatuor millia octingentæ libræ ſterlingæ.
Quinquaginta talenta. Triginta millia coronatorum. Sex millia librarum ſterlingarum.
Centum talenta. Sexaginta millia coronatorum. Duodecim millia librarum ſterlingarum.
Ducenta talenta. Centum viginti millia coronatorũ. Viginti quatuor millia librarum ſterlingarum.
Trecenta talenta. Centum octoginta millia coronatorum. Triginta ſex millia librarum ſterlingarum.
Quadringenta talenta. Ducenta quadraginta millia coronatorũ. Quadraginta octo millia librarum ſterlingarum.
Quingenta talenta. Trecenta millia coronatorum. Sexaginta millia librarum ſterlingarum.
Sexcenta talenta. Trecenta ſexaginta millia coronatorum. Septuaginta duo millia librarum ſterlingarum.
Septingenta talenta. Quadringenta viginti millia coronatorum. Octoginta quatuor millia librarum ſterlingarum.
Octingenta talenta. Quadringenta octoginta millia coronatorũ. Nonaginta ſex millia librarum ſterlingarum.
Noningenta talenta. Quingenta quadraginta millia coronatorũ. Centum & octo millia librarum ſterlingarum.
Mille talenta. Sexcenta millia coronatorum. Centum viginti millia librarum ſterlingarum.
Duo millia talentûm. Duodecies centena millia coronatorũ. Ducenta quadraginta millia librarum ſterlingarum.
Tria millia talentûm. Duodecies centena millia coronatorũ. Trecenta ſexaginta millia librarum ſterlingarum.
Quatuor millia talentûm. Vicies & quater centena millia coronatorum. Quadringenta octoginta millia librarum ſterlingarum.
Sex millia talentûm. Tricies ſexies cētena millia coronatorũ. Septingenta viginti millia librarum ſterlingarum.
Octo millia talentûm. Quadragies octies centena millia coronatorum. Noningenta ſexaginta millia librarum ſterlingarum.
Decem millia talentûm. Sexagies centena millia coronatorũ. Mille & ducenta millia librarum ſterlingarum.

Quindecim millia talentûm. Nonagies cētena millia coronatorū. Mille & ſexcenta millia librarum ſterlingarum.

Viginti millia talentûm. Centies vicies centena millia coronatorū. Bis millena & quadringenta millia librarum ſterlingarum.

MENSVRAE EX BVDAEI LIBRO DE ASSE.

G Yathus, duodecima pars ſextarij, pēdet vncias duas, drachmas ſexdecim.

Acetabulum, quod dicitur Oxybaphus, quarta pars Cotylæ, continet Cyathum & dimidium. pendet vncias tres.

Cotyla quæ Hemina dicitur, dimidium ſextarij continet, Cyathos ſex. pendet libram vnam.

Sextarius, ſexta pars Congij, continet Cotylas duas, Cyathos duodecim. pendet libras duas.

Congius continet Sextarios ſex, Heminas duodecim, Cyathos ſeptuaginta duos.

Modius, tertia pars Amphoræ, capit Sextarios ſexdecim. Heminas quadraginta octo.

Amphora quæ Quadrātal dicitur, capit Vrnas duas: Modios tres: Congios octo: Sextarios quadraginta octo: Heminas nonaginta ſex.

Cadus, qui etiam Metreta dicitur, capit Congios decem: Sextarios ſexaginta: Amphoram & quadrantem.

Culeus capit Amphoras viginti, Vrnas quadraginta, Modios ſexaginta.

Medimnus capit Modios ſex, Amphoras duas.

H ACTENVS ex Budæi libro de Aſſe excerpſimus. Nūc ætate noſtra apud ſingulas penè nationes aurei pro regū aut principum arbitrio varium habent pretium. ſic libræ, ſic ſolidi, vt nūc ſunt vocabula, magnam pro regionibus diuerſitatem habent. Cæterum illud mirum videtur, quomodo in tanta librarū & ſolidorū æſtimationis differētia, pro ſuo cuiuſque regionis more, multæ tamen nationes conſentiūt, vt vulgari lingua ſolidū vocent, quòd denariolos duodecim vulgares cōplectitur. librā, quod ſolidos viginti. Quocirca mercatorijs ſupputationibus in hac ætate noſtra plurimum conducet, ſiquis in promptu teneat quot ſolidos quælibet denariolorum ſumma procreet vſque ad mille. Id quod ante oculos per gradus quoſdam, numerorum notis ſignandum duximus.

QVOMODO EX DENARIIS FIANT SOLIDI.

12.d.	1.ſ.	100.d.	8.ſ.4.d.
18.d.	1.ſ.6.d.	200.d.	16.ſ.8.d.
24.d.	2.ſ.	300.d.	25.ſ.
30.d.	2.ſ.6.d.	400.d.	33.ſ.4.d.
36.d.	3.ſ.	500.d.	41.ſ.8.d.
42.d.	3.ſ.6.d.	600.d.	50.ſ.
48.d.	4.ſ.	700.d.	58.ſ.4.d.
54.d.	4.ſ.6.d.	800.d.	66.ſ.8.d.
60.d.	5.ſ.	900.d.	75.ſ.
66.d.	5.ſ.6.d.	1000.d.	83.ſ. 4.d.
72.d.	6.ſ.	1100.d.	91.ſ.8.d.
78.d.	6.ſ.6.d.	1200.d.	100.ſ.
84.d.	7.ſ.		
90.d.	7.ſ.6.d		
96.d.	8.ſ.		

FINIS APPENDICIS.

GVLIELMI BVDAEI PARISIENSIS, SECRETARII REGII, BREVIARIVM DE ASSE.

A S, QVI ET ASSIS dicitur, in duodecim vncias diſtribuitur. As quaternos denariolos noſtros valuit, & pauxillo plus, Sic fit vt duo aſſes & ſemis, ſeſtertium faciant, id eſt, caroleum noſtrum & ſemiſſem denarioli.

Duo aſſes, ſextans dicebantur, quod numiſma paruum fuit, cuius meminit Plinius & Liuius.

Quadrans etiam nummulus, & valebat aſſis quartam partem, & Triens tertiam. Semis autem duos quadranteis valebat.

Apud Græcos drachma in ſex obolos diuiſa eſt, & in trienteis, uadranteiſque. Seſquiobolus Athenis erat Romæ ſeſtertius.

Seſtertius, & nummus idem erant apud Romanos.

Seſtertius æſtimatione noſtra decem turonicis denariolis, & ſemiſſe denarioli valuit.

Denarius quaternos ſeſtertios nummos valebat, hoc eſt, quaternos caroleos noſtros, & binos denariolos turonicos: ex eo dictus denarius, quòd pro decem aſſibus locaretur æreis, & cederet in ſolutum.

Seſtertius ex eo dictus eſt, quòd duos aſſes, & ſemiſſem valeret. Qua ratione quaterni ſeſtertij denarium Romanum valebant. Et ſeſtertius dictus, quia tertius ſemis eſt, duo ſunt ſolidi aſſes, & ſemis. hic etiam nummus dicebatur, & argenteus erat.

Libra Romana quæ & mina, & pondo dicitur, centenos denarios, ſeu quod idem eſt, centenas drachmas habebat. Cũ igitur denarius quaternos ſeſtertios æquaret põdere & æſtimatione, liquet in libra Romana quadringentos fuiſſe ſeſtertios, & in duabus libris & ſelibra, mille ſeſtertios. qua ratione fit vt ſeſtertia ſingula numero plurali millenos ſeſtertios valeant, hoc eſt, duas libras & ſemiſſem. Vt enim ſeſtertius nummus dicitur ex eo quòd duos aſſes & ſemiſſem valebat, hoc eſt, duas libras æris grauis & ſelibrã: Ita ſeſtertia numero plurali & genere neutro ideo dicuntur, quòd ſingula duas libras & ſelibram argenti valerent, hoc eſt, ducentos & quinquaginta denarios: ſiue mille ſeſtertios, quod idem eſt. Sic fit vt decem ſeſtertia, & decem millia ſeſtertiûm nummorum pro eodem ab antiquis dicerentur.

Mille ſeſtertij, æſtimatione noſtra, viginti quinque coronatorũ valent. Dicitur autem mille ſeſtertij, & mille nummi: vel mille ſe-

ſtertiûm,& mille nummûm, vel copulate,mille ſeſtertiûm nūmū.

Cum autem mille ſeſtertij,id eſt ducenti quinquaginta denarij, duas libras argenti & ſemiſſem valerent,ſequitur vt libra Romana quæ & mina dicitur & pondo, decem aureos coronatos valuerit. Coronatos autem intelligi volo, vt ſinguli trigintaquinque ſolidos valeant,quod eſt legitimum pretium.

Igitur decē millia nummûm,vel decem millia ſeſtertiûm, quod idem eſt,ducētos & quinquaginta aureos coronatos valebāt.Hæc etiam decem ſeſtertia dicuntur,cum ſingula ſeſtertia, ſingula millia ſignificant.

Decies ſeſtertiûm,idē eſt quod decies centena millia ſeſtertiûm: quæ ſumma centies maior eſt decē ſeſtertijs. Idē eſt enim decies ſeſtertiûm,quod mille ſeſtertia. Cū enim ſingula ſeſtertia millenos nūmos ſeſtertios valeant,ſi mille ſeſtertia millies multiplices, fient decies centena millia, quem lingua vernacula millionem vocant.

Decies igitur ſeſtertiûm, centies ducentos & quinquaginta aureos valet,hoc eſt, vigintiquinque millia. Sic fiet vt millio Romanus vigintiquinque millia coronatorum valeat.

Hoc igitur tenere oportet, quòd quemadmodum cū à nummis ſeſtertijs ad ſeſtertia genere neutro fit tranſitus, numerus millies multiplicatur: ita cum ad eam loquutionem ventum eſt quæ per aduerbia numeralia enuntiatur,ſeſtertia ſingula conduplicata creſcunt:vt verbi gratia,Si centum ſeſtertia dicam,centum millia ſeſtertiûm intelligere debeas.Quod ſi centies ſeſtertiûm dicam,non iam centum ſeſtertia,ſed centies centena ſeſtertia,ſeu centies centena millia ſeſtertiûm, intelligendum ſit.

Vt autem facilis,& obuia ſit vnicuique earum ſummarum intelligentia quæ apud authores identidē legūtur,hoc meminiſſe oportet quod ſequitur, vt quæuis ſumma etiam in digitos deduci poſſit ſine calculis,aut abaco.

Decem ſeſtertia	ducenti quinquaginta aurei.
Viginti ſeſtertia	quingenti aurei.
Triginta ſeſtertia	ſeptingenti & quinquaginta.
Quadraginta ſeſtertia	mille aurei.
Quinquaginta ſeſtertia	mille ducenti & quinquaginta.
Sexaginta ſeſtertia	mille & quingenti.
Centum ſerſtertia	duo millia & quingenti.
Ducenta ſeſtertia	quinque millia.
Quadringenta ſeſtertia	decem millia coronatorum. Cenſus equeſtris ſub Iulio Cæſare.

Quingenta ſeſtertia duodecim millia & quingenti.
Sexcenta ſeſtertia quindecim millia.
Octingenta ſeſtertia Viginti millia. Ceſus ſenatorius ante Auguſtum.
Mille ſeſtertia viginti quinque millia.
Mille ac ducenta ſeſtertia triginta millia. Cenſus ſenatorius ſub Auguſto.

Notandum quòd ſupra mille ſeſtertia Romani fere ſemper per aduerbia loquebantur: infra mille, nunquam per aduerbia loquuti ſunt, hoc modo,

Decies ſeſtertiûm id eſt mille ſeſtertia, vigintiquinque millia.
Duodecies ſeſtertiûm triginta millia aureorum. Cenſus ſenatorius ſub Auguſto.
Quindecies ſeſtertiûm triginta ſeptem millia & quingenti.
Vicies ſeſtertiûm quinquaginta millia.
Tricies ſeſtertiûm ſeptuaginta quinque millia aureorum.
Quadragies ſeſtertiûm centum millia aureorum.
Quinquagies ſeſtertiûm cẽtum vigintiquinque millia aureorũ.
Sexagies ſeſtertiûm cẽtum quinquaginta millia aureorum
Centies ſeſtertiûm ducẽta quinquaginta millia aureorum Tanti æſtimatus eſt vnio Cleopatræ.
Quadringenties ſeſtertiûm decies centena millia, id eſt millio. Millies mille, id eſt millio. Tanti æſtimatus eſt à Plinio ornatus Lolliæ.
Millies ſeſtertiûm vicies quinquies centena millia, id eſt duo milliones, & quingenta millia.
Bis millies ſeſtertiûm quinquagies centena millia. Cẽſus Lẽtuli auguris ſub Auguſto.
Quater millies ſeſtertiûm decem milliones dicuntur, hoc eſt centies centena millia.
Decies millies ſeſtertiûm viginti quinque milliones.
Quadragies millies ſeſtertiûm centum milliones.
Vicies ſepties millies ſeſtertiûm coegiſſe Tiberius dicitur, id eſt ſexaginta ſex milliones & quinquaginta millia aureorum coronatorum, vt noſtro ſermone loquar.
Libra Romana in duodecim vncias & ſemiũciã diuiditur, & vncia in octonas drachmas. Sic fit vt centenæ drachmæ libram & minam, ſeu pondo faciant.

Drachma in terna ſcrupula diuiditur. Sic fit [illegible] ſint vicena quaterna ſcrupula in vncia. Pariſiēſes drachmam groſſum appellāt, & ſcrupulum appellant denarium,& binæ drachmæ ſterlini quinque dicuntur,id eſt quadrans vnciæ.

Hæc de pondere dicta ſufficiant.

GRAECORVM SVPPVTATIO.

Mina apud Græcos idē eſt quod libra & pōdo apud Romanos. hæc centum drachmas continebat, hoc eſt centum denarios Romanos,ſeu quadringentos ſeſtertios.

Mina igitur decem aureos coronatos valuit. Et drachma tres ſolidos turonicos & ſemiſſem,quāti ſcilicet denarius Romanus æſtimatus eſt à nobis,hoc eſt quaterni nummi.

Talentū multiplex fuit,vt in libro noſtro latiſſime enarratū eſt. ſed talentū Atticū quod plurimū celebratur ab hiſtoricis,ſexaginta libras valuit, ſeu minas,hoc eſt ſex millia denariorū vel drachmarum,quæ ſexagies denos coronatos valent, hoc eſt ſexcentos.

Talentum	ſexcenti aurei.
Decem talenta	ſex millia aureorum.
Quindecim talenta	nouem millia aureorum.
Viginti talenta	duodecim millia aureorum.
Quinquaginta talenta	triginta millia aureorum.
Duodecies ſeſtertiūm.	
Centum talenta	ſexaginta millia.
Vicies quater ſeſtertiūm.	
Ducenta talenta	centum millia & viginti.
Quadringenta talenta	ducenta & quadringenta millia.
Ducenties quadragies ſeſtertiūm.	
Mille talenta	ſexcenta millia.
Duo millia talentûm	mille & ducenta millia.
Bis millies & quadringenties ſeſtertiūm.	
Decem millia talentûm	ſexagies centena millia.

Tāti funeraſſe Alexander Epheſtionem dicitur.

ERRATA SIC CORRIGITO.

Pagina	Linea	
100	25	deſignent
130	4	perficient 318

EXCVDEBAT ROBERTVS STEPHANVS PARISIIS,
ANN. M. D. XXXVIII.
XVI. CAL. NOVEMB.

BIBLIOTECA NAZ.
ROMA
VITTORIO EMANUELE